Concursul studenţesc de matematică "Alexandru Climescu"
- 18 februarie 2012 -
Profilul electric

Problema 1 *Studiaţi convergenţa seriei:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{1+\sqrt{2}+...+\sqrt{n}}\right)^{\alpha},$$

unde $\alpha > 1$ *este o constantă arbitrară.*

Problema 2 *Fie* $f, g : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ *două funcţii derivabile cu proprietăţile*

$$f(2012) = g(2012) \text{ şi } f' \cdot g^2 = g' \cdot f^2.$$

Să se arate că $f = g$.

Problema 3 *Fie aplicaţia* $T_\alpha : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$T_\alpha(A) = A + \alpha A^T, \forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

a) Să se arate că T *este o transformare liniară.*
b) Să se scrie matricea lui T_α *în raport cu baza canonică din* $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
c) Să se calculeze polinomul caracteristic.
d) Să se determine valorile lui α *pentru care* T_α *este diagonalizabilă şi să se determine o bază formată din vectori proprii.*

Problema 4 *În spaţiul liniar* $\mathbb{R}^3$, *raportat la reperul ortonormat* $\mathcal{R} = \{O; \bar{\imath}, \bar{\jmath}, \bar{k}\}$ *se consideră punctul* $M(x_1, x_2, x_3)$ *şi planul asociat*

$$(P_M) : x_2X + x_3Y + x_1Z + \frac{1}{2}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) - (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 0.$$

Definim operatorul $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, *care duce punctul* M *în simetricul său faţă de planul* (P_M).
(a) Arătaţi că f *este un operator liniar (transformare liniară).*
(b) Determinaţi defectul.şi rangul operatorului.