Concursul Naţional Studenţesc de Matematică Traian Lalescu

Secţiunea C
Iaşi, 2010

1. Fie $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{|x|^a|y|^b}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

unde $a \geq \frac{1}{2}$, $b \geq \frac{1}{2}$ sunt doi parametri reali.

(a) Demonstraţi inegalitatea

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$$

(b) Studiaţi continuitatea funcţiei f în origine.

(c) Studiaţi existenţa derivatelor parţiale ale funcţiei f în origine.

(d) Pentru $a = 4$ şi $b = 1$ să se găsească mulţimea de convergenţă a seriei de funcţii

$$\sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{1}{n}, n\right)(x+1)^n$$

2. Fie funcţia

$$I:[0,\infty) \to \mathbb{R}, \; I(y) = \int_0^{\infty} e^{-(x+\frac{y}{x})^2} dx.$$

(a) Arătaţi că $I(y)$ este convergentă pentru orice $y \in [0,\infty)$.

(b) Determinaţi $I'(y)$ şi arătaţi că $I'(y) = -4I(y)$.

(c) Ştiind că $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, să se calculeze $I(y)$.

3. Fie funcţia $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$T((x_1, x_2, x_3)) = (2x_2 - x_3, -2x_1 + 2x_3, x_1 - 2x_2)$$

(a) Să se arate că T este aplicaţie liniară şi să se calculeze Ker$T$ şi ImT.

(b) Să se arate că dacă $u, v \in \mathrm{Im}T$, atunci unghiul dintre u şi v este egal cu unghiul dintre $T(u)$ şi $T(v)$.

(c) Fie matricea $Q = (I_3 - A)(I_3 + A)^{-1}$ unde A este matricea transformării T în baza canonică din $\mathbb{R}^3$. Determinaţi valorile proprii reale ale matricei Q şi subspaţiile de vectori proprii corespunzătoare.

4. Se consideră planul (π) de ecuaţie:

$$(2m + 1)x + (3 - 4m)y + 3z - 2 = 0$$

(a) Să se scrie ecuaţiile celor trei plane (α_1), (α_2), (α_3) ce conţin axele Ox, Oy, Oz şi care sunt perpendiculare pe planul (π).

(b) Să se arate că cele trei plane de la punctul a) trec printr-o dreaptă (δ) a cărei ecuaţie se cere.

(c) Să se arate că dreapta (δ) descrie un plan atunci când m variază.