I. Determinaţi valorile limitelor

$$\textbf{a)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+4n+1}{3n^2+4n+3}\right)^{n^2} \qquad \textbf{b)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{(2^x-1)(3^x-1)}{x\sin x}.$$

II. Studiaţi convergenţa seriilor

$$\textbf{a)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n^2} \qquad \textbf{b)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot\ldots\cdot(4n-3)}{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}.$$

III. (a) Demonstraţi că ecuaţia

$$e^x + x = 0$$

are cel puţin o rădăcină în intervalul $[-1,1]$.

(b) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4x-\ln(4^x+1)$. Demonstraţi că f' este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

(c) Demonstraţi că

$$x^3-3x+3\,\mathrm{arctg}\,x\geq 0,\qquad \text{pentru orice } x\geq 0.$$

(d) Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases} ax+b, & x>0\\ e^x+2, & x\leq 0\end{cases}$. Determinaţi $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât f să fie derivabilă în $x=0$.

IV. Fie $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$.

(a) Arătaţi că f satisface egalitatea

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)+z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=3f(x,y,z),\qquad \text{pentru orice } x,y,z\in\mathbb{R}.$$

(b) Calculaţi $df(x,y,z)$, $df(1,2,3)$, $df(1,2,3;\frac{1}{10},\frac{2}{10},\frac{3}{10})$.

(c) Calculaţi $d^2f(x,y,z)$.

Punctaj: **I**:1.5p(0.75+0.75), **II**:1.5p(0.75+0.75), **III**:3.5p(0.75+1+1+0.75),
V:2.5p(1.25+0.75+0.5), 1p din oficiu