

I. Determinați valorile limitelor

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n + 1}} + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + n + 2}} + \dots + \frac{n^2}{\sqrt{n^6 + 5n}} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} + e^{-4x} - 2 \cos x}{x^2}$.

II. Studiați convergența seriilor

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^{3n+5}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (4n-2)}$.

III. (a) Demonstrați că ecuația $3(x+1) \cos x = 2$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Determinați punctele de extrem ale funcției

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 12.$$

și natura acestora.

(c) Calculați polinomul Taylor de ordinul 3 asociat lui $f(x) = \cos(3x + \frac{\pi}{12})$ în $x_0 = \frac{\pi}{12}$.

(d) Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in C^1(I)$, I interval deschis, iar $x_0 \in I$ este astfel încât $f'(x_0) = 0$ iar $f''(x_0) < 0$, ce puteți spune despre x_0 ? Argumentați!

IV. Fie $f : (0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy + y \ln \frac{y}{x}$.

(a) Arătați că

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = xy + f(x, y), \quad \text{pentru orice } (x, y) \in \mathbb{R}.$$

(b) Calculați $df(x, y)$, $df(1, 1)$, $df(1, 1; \frac{1}{10}, \frac{2}{10})$.

(c) Calculați $d^2f(x, y)$.

Punctaj: I:1.75p(1+0.75), II:1.75p(0.75+1), III:2.75p(0.75+0.75+0.75+0.5),

IV:2.75p(1.25+0.75+0.75), 1p din oficiu, TL:2 ore