

Analiză Matematică 2

Temă (CC)

Problema 1 Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$.

- 1) Calculați $df(x), df(\frac{\pi}{6}), df(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{180})$.
- 2) Precizați o valoare aproximativă a lui $\sin 31^\circ$ obținută cu ajutorul uneia dintre diferențialele de mai sus.

Problema 2 Calculați $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ pentru funcțiile $f : D \rightarrow \mathbb{R}$,

- 1) $f(x, y) = x^4 + 5xy^3 - y^4,$ 2) $f(x, y) = \frac{3x+4y}{5x+6y},$ 3) $f(x, y) = e^{x^2y^3+y} \cos x,$
- 4) $f(x, y) = \sqrt[5]{x^4 + 4x^3y + 5y^4}.$

Problema 3 Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{x}{y} \sin \frac{y}{x}$.

- 1) Demonstrați că $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0, \forall (x, y) \in D$.
- 2) Calculați $df(x, y), df(1, \frac{\pi}{2}), df(1, \frac{\pi}{2}; \frac{1}{10}, \frac{2}{10})$.
- 3) Precizați o valoare aproximativă a lui $f(1 + \frac{1}{10}, \frac{\pi}{2} + \frac{2}{10})$ obținută cu ajutorul uneia dintre diferențialele de mai sus.

Problema 4 Determinați punctele de extrem ale funcțiilor

- 1) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy,$
 - 2) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 2z^2 + 4x - 6y + 4z$
- și precizați natura acestora.

Problema 5 Fie $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = x^2y^2 + 3y$. Calculați $\frac{df}{d\vec{v}}(1, 2)$, unde $\vec{v} = -\frac{1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$. Crește f într-o vecinătate a lui $A(1, 2)$ după direcția lui \vec{v} , sau scade după această direcție?

Problema 6 Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 4^n}$.

- 1) Determinați raza de convergență, interвалul de convergență și mulțimea de convergență.
- 2) Este seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{3^n + 4^n}$ convergentă, sau divergentă?

Problema 7 Determinați

- 1) $\int \cos(2x + 3)dx;$ 2) $\int \frac{dx}{(x + 2)^5}.$

Problema 8 Determinați

- 1) $\int x \operatorname{arctg} x dx;$ 2) $\int x^2 \sin x dx.$

Problema 9 Determinați

$$1) \int \sqrt[4]{\ln x} \frac{1}{x} dx; \quad 2) \int \sin^2 x \cos^3 x dx.$$

Problema 10 Determinați primitivele următoarelor funcții raționale.

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 7x + 10}; \quad 2) \int \frac{x - 4}{x^2 - 3x + 2} dx.$$

Problema 11 Determinați primitivele următoarelor funcții reducibile la funcții raționale.

$$1) \int e^{\sqrt{x}} dx; \quad 2) \int \frac{dx}{\sqrt{3-x} + \sqrt[3]{3-x}}.$$

Problema 12 Demonstrați că funcția

$$f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{\cos x}^{\sin x} e^t dt,$$

este strict crescătoare.

Problema 13 Determinați

$$1) \int_0^1 \ln(1+x^2) dx; \quad 2) \int_0^1 x e^{4x} dx.$$

Problema 14 Determinați

$$1) \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx; \quad 2) \int_0^1 \frac{x^2}{4+x^6} dx.$$

Problema 15 Determinați $\int_1^{16} \sqrt{1+\sqrt{x}} dx$.

Problema 16 Studiind paritatea integrandului, demonstrați că

$$1) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos x \ln \left(\frac{1-x}{1+x} \right) dx = 0.$$

Problema 17 Determinați $\int_0^{\pi} \cos x \sqrt{1+\sin^2 x} dx$.

Problema 18 Determinați valorile următoarelor limite (cu argumentarea cazului de nedeterminare)

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg} t dt}{x^2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\int_0^{\sin x} e^{t^2} dt}{\int_0^{\operatorname{tg} x} e^{t^2} dt}.$$

Problema 19 Determinați ariile domeniilor plane mărginite de graficele următoarelor funcții

$$1. f, g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3, g(x) = 4x.$$

Problema 20 Determinați ariile suprafețelor de rotație obținute prin rotația graficelor următoarelor funcții în jurul axei Ox

1. $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3}{3}$.

Problema 21 Determinați volumele corpurilor de rotație obținute prin rotația graficelor următoarelor funcții în jurul axei Ox

1. $f : [1, e] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{x} \ln x$.

Problema 22 Determinați valorile următoarelor integrale improprii

1) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx$.

Problema 23 Studiați convergența următoarelor integrale improprii

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 9x^2 + 1}$; 2) $\int_1^{\infty} \frac{x^3}{\sqrt{1 + 2x^4 + 3x^7}} dx$.

Problema 24 Studiați convergența următoarelor integrale improprii

1) $\int_1^3 \frac{1}{(x-1)^2(4-x)} dx$; 2) $\int_2^5 \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} dx$.

Problema 25 Determinați $\int_C y ds$, unde $(C) : \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{t} \end{cases}, t \in [2, 3]$.

Problema 26 Determinați valorile următoarelor integrale pe domenii dreptunghiulare

1) $\iint_{[1, \sqrt{3}] \times [0, 1]} \frac{1}{\sqrt{(4-x^2)(1+y^2)}} dx dy$.

Problema 27 Determinați aria domeniului plan mărginit de dreapta $(D) : y = x$ și de parabola $(P) : y = x^2$.

Problema 28 Determinați

$$\iint_D (x^2 + y) dx dy,$$

unde D este domeniul mărginit de parabolele $(P_1) : x^2 = y$ și $(P_2) : y^2 = x$.

Problema 29 Cu ajutorul coordonatelor polare, determinați

1. $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4; x \geq 0, y \leq 0\}$.