

AM1, Curs 1

Noțiuni introductive

1 Noțiuni introductive

1.1 Teoria mulțimilor

Dacă A este o mulțime, vom nota prin $x \in A$ faptul ca x este un element al mulțimii A (sau x **aparține** lui A), respectiv prin $x \notin A$ faptul că x nu este un element al mulțimii A (sau x **nu aparține** lui A). Mulțimea care nu conține niciun element se va numi **mulțimea vidă** și se va nota $\emptyset$.

Exemplu. $1 \in (0, 2)$, dar $3 \notin (0, 2)$.

Mulțimi de numere

În cele ce urmează, vom presupune cunoscute proprietățile următoarelor mulțimi de numere:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ - mulțimea numerelor naturale;

$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ - mulțimea numerelor întregi;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q}; p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$ - mulțimea numerelor raționale.

Între acestea au loc următoarele relații de incluziune

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Pentru $A \in \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}\}$, se notează cu $A^* = A \setminus \{0\}$ mulțimea numerelor nenule din A .

1.2 Minoranți, majoranți

Fie $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$.

Spunem că A este **minorată** dacă există $m \in \mathbb{R}$ astfel că $m \leq x$ pentru orice $x \in A$. Un astfel de element m (care nu este unic determinat) se va numi **minorant** al mulțimii A .

Similar, spunem că A este **majorată** dacă există $M \in \mathbb{R}$ astfel ca $x \leq M$ pentru orice $x \in A$, un astfel de element M (care de asemenea nu este unic determinat) numindu-se **majorant** al mulțimii A . Minoranții și majoranții unei mulțimi A nu aparțin neapărat acestei mulțimi.

Exemplu. Fie $A = (2, 3] \cup [4, 5)$.

Atunci A este majorată, 5 fiind un majorant al lui A , deoarece $x \leq 5$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 5 nu este element al mulțimii A , întrucât toate elementele lui A sunt strict mai mici decât 5, iar orice număr mai mare decât 5 este de asemenea un majorant al mulțimii A . În particular, 6, 7, 8.3, ... sunt majoranți ai mulțimii A .

Similar, A este minorată, 2 fiind un minorant al lui A , deoarece $2 \leq x$ pentru orice $x \in A$. Se observă că 2 nu este element al mulțimii A , deoarece toate ele-

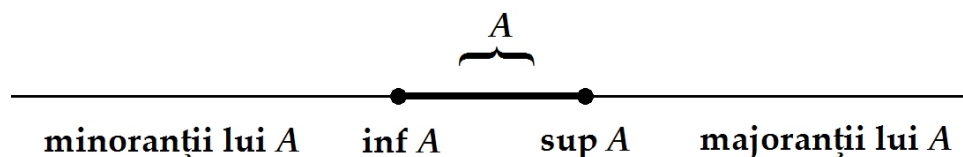


Figure 1: Majoranții și minoranții unei mulțimi A .

mentele lui A sunt strict mai mari decât 2, iar orice număr mai mic decât 2 este de asemenea un minorant al lui A . În particular, $1, 0, -1, -1.5, \dots$ sunt minoranți ai mulțimii A .

Exemplu. Fie $B = [2, +\infty)$.

Atunci B nu este majorată, deoarece ea conține numere oricât de mari. Ea este însă minorată, 2 (de exemplu) fiind un minorant al lui B .

1.3 Mulțimi mărginite

Margine inferioară, margine superioară

Se observă că dacă o mulțime A este minorată, nu există un cel mai mic minorant al lui A , deoarece se pot preciza minoranți oricât de mici. Similar, dacă o mulțime A este majorată, nu există un cel mai mare majorant, întrucât se pot preciza majoranți oricât de mari.

În schimb, dacă A este minorată, atunci există (în $\mathbb{R}$) un cel mai mare minorant al lui A , numit **margine inferioară** a lui A , notată $\inf A$, iar dacă A este majorată, atunci există (în $\mathbb{R}$) un cel mai mic majorant al lui A , numit **margine superioară** a lui A , notată $\sup A$. Dacă marginea inferioară, respectiv marginea superioară a unei mulțimi A există, atunci acestea sunt unice, unicitatea derivând din caracterul acestora de a fi „cea mai mare”, respectiv „cea mai mică”.

Exemplu. Pentru $A = (2, 3] \cup [4, 5)$ (exemplul de mai sus), $\inf A = 2$, iar $\sup A = 5$.

Mulțimi mărginite inferior, mulțimi mărginite superior

În aceste condiții, o mulțime nevidă A care este majorată se va numi **mărginită superior**, iar o mulțime nevidă A care este minorată se va numi **mărginită inferior**. Dacă A este atât mărginită superior cât și mărginită inferior, ea se va numi **mărginită**. Conform acestei definiții, o mulțime A este mărginită dacă există $m, M \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$m \leq x \leq M \quad \text{pentru orice } x \in A.$$

Mulțimi nemărginite

O mulțime care nu este mărginită se va numi **nemărginită**.

Exemplu. Fie $A = (2, 3] \cup [4, 5)$ (exemplul de mai sus). Atunci A este mărginită, fiind atât mărginită inferior, cât și mărginită superior.

Fie acum $B = [2, +\infty)$. Atunci B nu este mărginită, deoarece nu este mărginită superior. Ea este deci nemărginită.

Modulul unui număr real

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, definim **modulul** sau **valoarea absolută** a lui x , notat $|x|$ prin

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x, & \text{dacă } x < 0 \end{cases}.$$

M1 $|x| \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ și $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

M2 $||x|| = |x|$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

M3 $|xy| = |x||y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M4 $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$.

M5 $|x + y| \leq |x| + |y|$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

M6 $|x - y| \geq ||x| - |y||$ pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

Funcția modul astfel definită poate fi folosită pentru a caracteriza mărginirea unei mulțimi.

Teorema 1.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$. Atunci

A este mărginită $\Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R}$ astfel ca $|x| \leq M$ pentru orice $x \in A$.

Exemplu. Fie $A = \{x = (-1)^n \frac{n}{n+1}; n \in \mathbb{N}^*\}$. Atunci, pentru $x \in A$,

$$|x| = \left| (-1)^n \frac{n}{n+1} \right| = |(-1)^n| \left| \frac{n}{n+1} \right| = \frac{n}{n+1} \leq 1,$$

deci A este mărginită

2 Mulțimea $\overline{\mathbb{R}}$

În analiza matematică, pe lângă numere reale, se utilizează și două simboluri cu sens aparte, $+\infty$ (plus infinit, notat prescurtat și ∞) și $-\infty$ (minus infinit), cu proprietatea că

$$-\infty < x < \infty \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}.$$

Vom nota

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

și vom numi această mulțime **dreapta reală încheiată**, observând că ea este de asemenea total ordonată.

Operațiile aritmetice se extind (parțial) la $\overline{\mathbb{R}}$ în următorul mod:

$$x + \infty = x - (-\infty) = +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x + (-\infty) = x - \infty = -\infty \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

$$x \cdot \infty = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$

$$x \cdot (-\infty) = \begin{cases} -\infty, & \text{dacă } x > 0 \\ +\infty, & \text{dacă } x < 0 \end{cases};$$

$$\frac{x}{\infty} = \frac{x}{-\infty} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R};$$

respectiv

$$\infty + \infty = \infty;$$

$$(-\infty) + (-\infty) = (-\infty);$$

$$\infty \cdot \infty = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty;$$

$$\infty \cdot (-\infty) = -\infty.$$

Operațiilor $0 \cdot (\pm\infty)$, $\infty - \infty$, $-\infty - (-\infty)$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ nu li se atribuie niciun sens.

2.1 Intervale în $\mathbb{R}$ și $\overline{\mathbb{R}}$

Intervale în $\mathbb{R}$

Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Numim **intervale** în $\mathbb{R}$ mulțimi de forma

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\} \text{ (interval închis);}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\} \text{ (interval deschis);}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}; \text{ (interval semideschis; interval închis la dreapta și deschis la stânga)}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\} \text{ (interval semideschis; interval deschis la dreapta și închis la stânga);}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < \infty\} \text{ (interval deschis nemărginit la dreapta; semidreaptă deschisă nemărginită la dreapta);}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x < a\} \text{ (interval deschis nemărginit la stânga; semidreaptă deschisă nemărginită la stânga);}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < \infty\} \text{ (semidreaptă închisă nemărginită la dreapta);}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R}; -\infty < x \leq a\} \text{ (semidreaptă închisă nemărginită la stânga);}$$

$$(-\infty, +\infty) = \mathbb{R} \text{ (axa reală).}$$

Intervale în $\overline{\mathbb{R}}$

Dacă $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, putem extinde notațiile pentru intervale definite mai sus și obținem

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}}; a \leq x \leq b\}, \quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\};$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}, \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\},$$

păstrând denumirile de intervale închise, deschise, respectiv semideschise. De asemenea

$$[-\infty, +\infty] = \overline{\mathbb{R}} \quad (\text{dreapta reală încheiată}).$$

Supremumul și infimumul unei mulțimi în $\overline{\mathbb{R}}$

Fie $A \neq \emptyset$. Cu aceste notații, vom spune că

$$\sup A = +\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este majorată (este nemărginită superior)}$$

respectiv

$$\inf A = -\infty \quad \text{dacă } A \text{ nu este minorată (este nemărginită inferior)}.$$

și vom observa că în $\overline{\mathbb{R}}$ orice mulțime nevidă admite un supremum și un infimum.

Exemple. $\sup[3, +\infty) = +\infty$, $\inf(-\infty, 1) = -\infty$, $\sup \mathbb{N} = +\infty$;

$A = \{x; x = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită superior, deci $\sup A = +\infty$.

$A = \{x; x = -n + 2, n \in \mathbb{N}\}$ nu este mărginită inferior, deci $\inf A = -\infty$.

2.2 Vecinătăți în $\overline{\mathbb{R}}$

1. Numim **vecinătate** a unui punct $x \in \mathbb{R}$ orice mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval deschis incluzându-l pe x , adică pentru care există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x \in (a, b) \subseteq V.$$

2. Numim **vecinătate** a lui $+\infty$ orice mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $(a, \infty]$, cu $a \in \mathbb{R}$.
3. Numim **vecinătate** a lui $-\infty$ orice mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $[-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

Exemple. Mulțimile $(-2, 4]$, $(0, 6]$, $(-\infty, 2]$, $(-2, 5] \cup (6, \infty)$ sunt vecinătăți ale lui $x = 1$ deoarece conțin intervalul deschis $(0, 2)$ care-l include pe 1.

Mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece ea nu conține intervale.

Mulțimea $B = [1, 3]$ nu este vecinătate a lui $x = 1$ deoarece nu există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $1 \in (a, b) \subseteq B$ (ar trebui ca $a < 1$ și atunci $(a, b) \not\subseteq B$).

AM1, Curs 2

Șiruri de numere reale

1 Proprietăți generale

Fie $A \neq \emptyset$ o mulțime dată. Se numește **șir de elemente din A** o funcție $f : \mathbb{N} \rightarrow A$. Dacă $A = \mathbb{R}$, șirul respectiv se va numi **șir de numere reale**, **șir numeric** sau, mai simplu, **șir**. Fiind dat un șir $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, se vor numi **termeni ai șirului** numerele $f(0), f(1), f(2), \dots$, notate de obicei cu ajutorul unui indice sub forma

$$f(0) = x_0, f(1) = x_1, f(2) = x_2, \dots, f(n) = x_n, \dots,$$

x_n numindu-se **termenul general al șirului**, sau **termenul de rang n** . Un șir cu termenul general x_n se va nota și $(x_n)_{n \geq 0}$. Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ nu sunt definiți (ceea ce corespunde unei funcții $f : \{k, k+1, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$), vom nota șirul sub forma $(x_n)_{n \geq k}$.

1.1 Moduri de definire a unui șir

Un șir poate fi definit precizând formula termenului general, prin intermediul unei recurențe sau în mod descriptiv.

Exemple. Șiruri definite prin formula termenului general:

$$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = 3n + 1; \quad x_0 = 1, x_1 = 4, x_2 = 7, \dots$$

$$(x_n)_{n \geq 0} : x_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } n \text{ par} \\ 0, & \text{dacă } n \text{ impar} \end{cases}; \quad x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = 1, \dots$$

Șiruri definite prin intermediul unei recurențe

Dacă pentru un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ se cunosc primii k termeni $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$, fiind dată de asemenea o relație prin care termenul general x_n se exprimă în funcție de $x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}$ pentru orice $n \geq k$, se spune că $(x_n)_{n \geq 0}$ este definit printr-o **recurență de ordinul k** .

De exemplu, relația de recurență definită prin

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \text{ cu } x_0 = 0, x_1 = 1$$

este o relație de recurență de ordinul al doilea. De notat că ordinul unei relații de recurență este dat de diferența dintre indicele cel mai mare și indicele cel mai mic al termenilor care apar în acea relație și faptul că trebuie precizați atâția termeni inițiali ai șirului cât este ordinul relației de recurență.

În particular, progresele aritmetice și geometrice sunt relații de recurență de ordinul 1.

Șiruri definite în mod descriptiv.

Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$, $x_n =$ aproximarea prin lipsa cu n zecimale exacte a lui $\sqrt{2}$ este definit în mod descriptiv. Se obține că $x_1 = 1.4, x_2 = 1.41, x_3 = 1.414, \dots$.

1.2 Subșiruri ale unui șir dat

Numim **subșir** al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ ai cărui termeni sunt elemente ale mulțimii termenilor șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$, cu $k_0 < k_1 < k_2 < \dots < k_n < \dots$

Cum un subșir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ nu conține neapărat toți termenii șirului inițial $(x_n)_{n \geq 0}$, urmează că $k_n \geq n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$. Atunci subșirul $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n}, \dots$ se numește **subșirul termenilor de rang par ai șirului**. Subșirul $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$: $x_1, x_3, x_5, \dots, x_{2n+1}, \dots$ se numește **subșirul termenilor de rang impar ai șirului**. Un alt subșir este $(x_{n+3})_{n \geq 0}$: $x_3, x_4, x_5, \dots$, obținut prin eliminarea primilor trei termeni ai șirului.

Cum pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ putem construi șirul $(x_{kn})_{n \geq 0}$: $x_0, x_k, x_{2k}, \dots, x_{kn}, \dots$ al termenilor de rang divizibil cu k , urmează că orice șir are o infinitate de subșiruri.

1.3 Șiruri mărginite

Fie un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ de numere reale și $A = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ mulțimea termenilor săi. Vom spune că $(x_n)_{n \geq 0}$ se numește **mărginit** dacă A este mărginită, respectiv că $(x_n)_{n \geq 0}$ este **mărginit superior** (respectiv **mărginit inferior**) dacă A este majorată (respectiv minorată). Un șir care nu este mărginit (respectiv nu este mărginit superior sau nu este mărginit inferior) se numește **nemărginit** (respectiv **nemărginit superior** sau **nemărginit inferior**).

Conform caracterizării mulțimilor mărginite, aplicată mulțimii A a termenilor șirului, se obțin următoarele proprietăți.

Teorema 1.1. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$.

1. $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior dacă și numai dacă există $b \in \mathbb{R}$ astfel ca $x_n \leq b$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
2. $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior dacă și numai dacă există $a \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.
3. $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit dacă și numai dacă există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca $a \leq x_n \leq b$ pentru orice $n \geq 0$, ceea ce este echivalent cu faptul că există $M > 0$ astfel ca $|x_n| \leq M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Exemple. 1. $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = \sin \frac{n\pi}{3}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = 2 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ este mărginit, deoarece $|x_n| \leq 3$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

3. $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = (-1)^n n$ nu este mărginit, nefiind nici mărginit inferior, nici mărginit superior.

1.4 Șiruri monotone

Fie un șir de numere reale $(x_n)_{n \geq 0}$. Spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este **crescător** (respectiv **strict crescător**) dacă $x_n \leq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n < x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al șirului este mai mic (respectiv strict mai mic) decât termenul care-i succede.

De asemenea, spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este **descrescător** (respectiv **strict descrescător**) dacă $x_n \geq x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$ (respectiv $x_n > x_{n+1}$ pentru orice $n \geq 0$), adică orice termen al șirului este mai mare (respectiv strict mai mare) decât termenul care-i succede.

Un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ crescător sau descrescător se va numi șir **monoton**, iar un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ strict crescător sau strict descrescător se va numi șir **strict monoton**. Desigur, orice șir strict monoton este și monoton; nu și reciproc.

Pentru a preciza monotonia unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ se pot folosi următoarele metode.

Studierea semnelui diferenței $x_{n+1} - x_n$.

- Dacă $x_{n+1} - x_n \geq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător.
- Dacă $x_{n+1} - x_n \leq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător.

Compararea raportului $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ **cu 1, dacă** $(x_n)_{n \geq 0}$ **este un șir cu termeni strict pozitivi.**

- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător.
- Dacă $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$, atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător.

Folosind inegalități stricte în locul inegalităților nestricte se obțin criteriile corespunzătoare de monotonică strictă.

Exemplu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = 3n + 2$. Atunci $x_{n+1} = 3(n+1) + 2$ (de notat că pentru calculul lui x_{n+1} cu ajutorul formulei date pentru x_n se înlocuiește n cu $(n+1)$), de unde $x_{n+1} = 3n + 5$. De aici,

$$x_{n+1} - x_n = 3n + 5 - (3n + 2) = 3 > 0,$$

deci $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător.

Exemplu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Atunci

$$x_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

De notat că în astfel de situații este utilă și precizarea penultimului termen din sumă. Atunci

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} \\ &> 0 \end{aligned}$$

deci $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător.

Exemplu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{3n-1}{3n+1}$. Atunci

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{3n-1}{3n+1} \cdot \frac{3(n+1)-1}{3(n+1)+1} \\ &= \frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{3n-1}{3n+1} \cdot \frac{3n+2}{3n+5} \end{aligned}$$

Similar, în această situație este utilă și precizarea penultimului termen din produs. Atunci

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{3n-1}{3n+1} \cdot \frac{3n+2}{3n+5}}{\frac{2}{4} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{3n-1}{3n+1}} \\ &= \frac{3n+2}{3n+5} \\ &< 1 \end{aligned}$$

deci $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.

1.5 Legătura între monotonie și mărginirea unui șir

Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir crescător, atunci

$$x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots,$$

deci $x_0 \leq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit inferior de primul termen x_0 .

Similar, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este un șir descrescător, atunci

$$x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n \geq \dots,$$

deci $x_0 \geq x_n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit superior de primul termen x_0 . Au loc atunci următoarele proprietăți.

Teorema 1.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir.

1. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este crescător, atunci el este mărginit inferior.
2. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este descrescător, atunci el este mărginit superior.

2 Șiruri cu limită

Noțiunea de limită a unui șir este unul dintre cele mai importante concepte ale analizei matematice, precizând tendința termenilor unui șir de a se apropia de un anumit număr (cazul șirurilor cu limită finită), sau de a deveni oricât de mari, respectiv oricât de mici (cazul șirurilor cu limită infinită).

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ **are limită** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ lasă în afara ei cel mult un număr finit de termeni ai șirului, adică există un rang $n_V \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \in V$ pentru orice $n \geq n_V$ (altfel spus, vecinătatea V conține toți termenii șirului de la rangul n_V încolo). În acest caz, vom nota $x_n \rightarrow l$ **pentru** $n \rightarrow \infty$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, spunându-se și că șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ (sau termenul său general x_n) **tinde** la l .

Se poate observa că adăugarea sau eliminarea unui număr finit de termeni ai șirului nu-i schimbă acestuia natura de a avea sau nu limită și nici limita, dacă aceasta există, putându-se modifica doar rangul începând cu care termenii șirului aparțin unei vecinătăți date.

Unicitatea limitei unui șir

În cele ce urmează, se va observa mai întâi că limita unui șir, dacă există, este unică.

Teorema 2.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci $l_1 = l_2$.

Subșiruri ale unui șir cu limită

Este ușor de observat că proprietățile de monotonie și mărginire se transmit de la un șir către subșirurile sale. Astfel, dacă un șir este monoton, orice subșir al său este de asemenea monoton, cu același sens de monotonie, iar dacă un șir este mărginit, orice subșir al său este de asemenea mărginit, mulțimea termenilor subșirului fiind inclusă în mulțimea (mărginită) a termenilor șirului. Pe aceeași linie de gândire, proprietatea unui șir de a avea limită se transmite de asemenea către subșirurile sale.

Teorema 2.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci orice subșir $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ al său are aceeași limită.

Condiție suficientă ca un șir să nu aibă limită

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ are două subșiruri care tind la limite diferite, atunci el nu are limită, deoarece dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ ar avea limită l , atunci și cele două subșiruri ar avea aceeași limită l .

Exemplu. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu are limită, deoarece subșirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_{2n} = 1$ și subșirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$.

AM1, Curs 3

Șiruri de numere reale (continuare)

1 Calculul unor limite fundamentale

1.1 Limitele funcțiilor polinomiale

Să observăm mai întâi că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2n^2 - 3n + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(2 - \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) = \infty(2 - 0 + 0) = \infty \cdot 2 = \infty.$$

Într-o situație mai generală, fie P o funcție polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Considerăm șirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = P(n)$. Pentru calculul limitei șirului $(x_n)_{n \geq 0}$ se va scoate factor comun forțat n^k ($k = \text{grad } P$). Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right) \\ &= \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_k n^k = \infty \cdot a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

de unde se poate remarca faptul că **limita lui $P(n)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P .**

- Exemple.**
1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^3 - 2n^2 + n - 1) = +\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^3 este pozitiv.
 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^4 + 3n^3 - \sqrt{2}n + 5) = -\infty$, deoarece coeficientul termenului de grad maxim n^4 este negativ

1.2 Limitele funcțiilor raționale

Fie P, Q două funcții polinomiale de grad k , respectiv l , unde $k, l \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,$$

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.$$

Considerăm şirul $(x_n)_{n \geq 0}$, $x_n = \frac{P(n)}{Q(n)}$, presupunând că $Q(n) \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$. Pentru calculul limitei şirului $(x_n)_{n \geq 0}$ se va scoate factor comun forţat n^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv n^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obţine că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_1 n + b_0} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{n} + \dots + a_1 \frac{1}{n^{k-1}} + a_0 \frac{1}{n^k} \right)}{n^l \left(b_l + b_{l-1} \frac{1}{n} + \dots + b_1 \frac{1}{n^{l-1}} + b_0 \frac{1}{n^l} \right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases} \end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k}{b_l n^l} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{k-l} \frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că **limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P şi Q .**

De asemenea, dacă $\text{grad } P < \text{grad } Q$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = 0$, deci **dacă gradul numitorului este mai mare decât gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este 0.**

Dacă $\text{grad } P = \text{grad } Q$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_k}{b_l}$, deci **dacă gradul numitorului este egal cu gradul numărătorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este raportul coeficienţilor termenilor dominanţi.**

Dacă $\text{grad } P > \text{grad } Q$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = +\infty \frac{a_k}{b_l}$, deci **dacă gradul numărătorului este mai mare decât gradul numitorului, atunci limita lui $\frac{P(n)}{Q(n)}$ este $+\infty$ dacă coeficienţii termenilor dominanţi au acelaşi semn, respectiv $-\infty$ dacă coeficienţii termenilor dominanţi au semne opuse.**

Exemple. 1.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 3n + 5}{3n^2 + 6n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 5\frac{1}{n^2})}{n^2(3 + 6\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})} = \frac{2}{3}.$$

2.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 4n^2 - n + 2}{2n^2 - 3n + 7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(1 + 4\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + 2\frac{1}{n^3})}{n^2(2 - 3\frac{1}{n} + 7\frac{1}{n^2})} = +\infty \cdot \frac{1}{2} = +\infty.$$

3.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 3n - 6}{n^3 + 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(5 + 3\frac{1}{n} - \frac{6}{n^2})}{n^3(1 + 4\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3})} = 0 \cdot 5 = 0.$$

1.3 Limita șirului $(q^n)_{n \geq 0}$

Este ușor de observat că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, \text{ pentru } q > 1.$$

Exemple. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3.5)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2})^n = \infty.$

De asemenea, pentru $q = 1$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = 1$$

(nu este caz de nedeterminare, deoarece $1^n = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$).

Se poate demonstra că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

Exemple. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n = 0.$

Fie acum $q \in (-\infty, -1)$. Cum $q^{2n} \rightarrow \infty$ iar $q^{2n+1} \rightarrow -\infty$, urmează că nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$. Se observă în mod analog că nu există $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n$ nici pentru $q = -1$.

Exemple. $\lim_{n \rightarrow \infty} (-3)^n$ nu există; $\lim_{n \rightarrow \infty} (-7.25)^n$ nu există.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \text{nu există,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ 0, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ 1, & \text{dacă } q = 1 \\ +\infty, & \text{dacă } q > 1 \end{cases}.$$

1.4 Operații cu șiruri care au limite

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unor șiruri de a avea limită se păstrează, în anumite condiții, după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență, produs cu o constantă, produs termen cu termen, inversare, raport termen cu termen. Se poate spune și că operațiile uzuale **comută** (dacă sunt respectate anumite condiții) cu operația de calculare a limitei.

Teorema 1.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale cu limită astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$, și fie $c \in \mathbb{R}$. Atunci

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x + y$, dacă $\{x, y\} \neq \{-\infty, \infty\}$
(limita sumei este egală cu suma limitelor).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = cx$, dacă $c \neq 0$, sau pentru orice c dacă $x \notin \{-\infty, \infty\}$
(operația de înmulțire cu o constantă comută cu operația de calculare a limitei).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = xy$, dacă $\{x, y\} \neq \{0, \infty\}$, $\{x, y\} \neq \{0, -\infty\}$
(limita produsului este egală cu produsul limitelor).
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{x}$, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$
(limita inverselor este egală cu inversa limitei).

1.5 Șiruri conținând funcția modul

Pe lângă operațiile uzuale, și aplicarea funcției modul **comută** cu operația de calculare a limitei.

Teorema 1.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Atunci

1. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, iar $l \in \mathbb{R}$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |l|$.
2. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$.
3. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

1.6 Proprietăți ale șirurilor cu limită

Teorema ce urmează, numită și **teorema de trecere la limită în inegalități** exprimă faptul că inegalitățile (nestrict) dintre termenii a două șiruri se păstrează prin trecere la limită.

Teorema 1.3. Fie două șiruri $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ cu proprietățile

1. Există un rang n_0 astfel ca $x_n \leq y_n$ pentru $n \geq n_0$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci $x \leq y$.

Inegalitățile nestrict de la termenii a două șiruri nu se păstrează neapărat prin trecere la limită. Aceasta se poate observa considerând șirurile $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{1}{n+2}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = \frac{1}{n+1}$, pentru care $x_n < y_n$ pentru orice $n \geq 0$, dar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$.

Teorema de mai jos, numită și **teorema cleștelui**, ne permite să calculăm limita unui șir care poate fi încadrat între alte două șiruri având aceeași limită.

Teorema 1.4. Fie trei șiruri de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$, $(x_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ cu proprietățile

1. Există un rang n_0 astfel ca $a_n \leq x_n \leq b_n$ pentru $n \geq n_0$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Exercițiu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Soluție. Deoarece $(-1)^n$ poate fi -1 sau 1 , după cum n este impar sau par, urmează că

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \implies \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}.$$

Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ urmează că și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Exercițiu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Soluție. Observăm că dintre cei n termeni conținuți în suma care definește x_n , $\frac{1}{n^2+n}$ este cel mai mic, iar $\frac{1}{n^2+1}$ este cel mai mare. Urmează că

$$n \cdot \frac{1}{n^2+n} \leq x_n \leq n \cdot \frac{1}{n^2+1},$$

iar deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1}{n^2+1} = 0$, urmează că de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, $(x_n)_{n \geq 1}$ fiind încadrat între șirurile $(\frac{1}{n+1})_{n \geq 1}$, $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ cu limita 0.

1.7 Șiruri convergente

Un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ cu limită finită l se numește **șir convergent**, spunându-se și că $(x_n)_{n \geq 0}$ **este convergent către l** . Orice șir care nu este convergent se numește **divergent**.

În acest sens, șirurile divergente pot fi deci șiruri cu limită infinită sau șiruri fără limită. În plus, orice subșir al unui șir convergent este convergent la aceeași limită ca și șirul inițial. De aici, dacă un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ conține un subșir cu limită infinită, sau două subșiruri cu limite diferite, atunci el este divergent.

Exemple. 1. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = 2^n$ este divergent, deoarece are limita $+\infty$.

2. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ este divergent, deoarece nu are limită.

3. Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}n$ este divergent, deoarece subșirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_{2n} = 2n$ are limita $+\infty$.

1.8 Operații cu șiruri convergente

În cele ce urmează, se va observa că proprietatea unor șiruri de a fi convergente se păstrează după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență, produs cu o constantă, produs termen cu termen, iar în anumite condiții se păstrează și după efectuarea inverselor sau a raportului termen cu termen.

Teorema 1.5. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ și $(y_n)_{n \geq 0}$ două șiruri convergente de numere reale astfel ca $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y$. Atunci șirul sumă $(x_n + y_n)_{n \geq 0}$, șirul produs cu o constantă $(cx_n)_{n \geq 0}$, $c \in \mathbb{R}$, și șirul produs $(x_n y_n)_{n \geq 0}$ sunt convergente, iar dacă $x \neq 0$ și $x_n \neq 0$ pentru orice $n \geq 0$, atunci și șirul inverselor $(\frac{1}{x_n})_{n \geq 0}$ este convergent. În plus, au loc relațiile

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x + y$
(limita sumei este egală cu suma limitelor).
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = cx$
(operația de înmulțire cu o constantă comută cu operația de calculare a limitei).
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = xy$
(limita produsului este egală cu produsul limitelor).
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} = \frac{1}{x}$, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$
(limita inverselor este egală cu inversa limitei).

1.9 Alte relații între convergență, monotonie și mărginire

În cele ce urmează, vom studia relațiile dintre proprietățile de monotonie, mărginire și convergență.

Teorema 1.6. Orice șir convergent este mărginit.

Aplicând operatorul de negație logică propoziției de mai sus, obținem teorema următoare.

Teorema 1.7. Orice șir nemărginit este divergent.

Exemple. 1. Nu orice șir mărginit este convergent.

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ nu este convergent, deoarece subșirul termenilor de rang par $(x_{2n})_{n \geq 0}$: $x_{2n} = 1$ și subșirul termenilor de rang impar $(x_{2n+1})_{n \geq 0}$: $x_{2n+1} = -1$ au limitele diferite $l_1 = 1$, respectiv $l_2 = -1$. În schimb, $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit, deoarece $-1 \leq x_n \leq 1$ pentru orice $n \geq 0$.

2. Nu orice șir convergent este monoton.

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ este convergent la 0, deoarece $|x_n| = \frac{1}{n}$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât și negative.

3. Nu orice șir monoton este mărginit.

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = 2n + 1$ este monoton, dar nu este mărginit, fiind nemărginit superior.

4. Nu orice șir monoton este convergent.

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = 2n + 1$ este monoton, dar nu este convergent, având

limita $+\infty$.

5. **Nu orice șir mărginit este monoton.**

Șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$ este mărginit, dar nu este monoton, luând alternativ atât valori pozitive, cât și negative.

După cum s-a observat deja, nici monotonia nici mărginirea unui șir (ca proprietăți **de sine stătătoare**) nu atrag convergența acestuia. Totuși, dacă aceste proprietăți au loc **împreună**, atunci convergența șirului este asigurată.

Teorema 1.8. *Orice șir monoton și mărginit este convergent.*

AM1, Curs 4

Șiruri de numere reale (continuare)

1 Un șir cu limita numărul e

Vom considera în continuare șirul $(x_n)_{n \geq 1} : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, căruia îi vom demonstra convergența. Mai întâi, are loc următorul rezultat.

Teorema 1.1. Fie $(x_n)_{n \geq 1} : x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Atunci $(x_n)_{n \geq 1}$ este strict crescător și mărginit.

Fiind monoton și mărginit, $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent. Prin convenție, se notează cu e limita sa, unde $e = 2.71828\dots$

Din teorema de mai sus se obține următoarea egalitate importantă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

De asemenea, se observă că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(\frac{n-1}{n}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{n}{n-1}} \\ &= e, \end{aligned}$$

deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Câteva consecințe importante motivate de rezultatele deja obținute sunt indicate în cele ce urmează.

Teorema 1.2. Au loc următoarele proprietăți.

1. Fie $(p_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale strict pozitive cu $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$. Atunci
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$
2. Fie $(m_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale strict negative cu $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = -\infty$. Atunci
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e.$$
3. Fie $(z_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale nenule cu $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. Atunci
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z_n)^{\frac{1}{z_n}} = e.$$

Exemple.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right]^{\frac{2}{2n-1}(n+1)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2}{2n-1} \right)^{\frac{2n-1}{2}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+2}{2n-1}} = e.\end{aligned}$$

Aici,

$$(z_n)_{n \geq 1} : z_n = \frac{2}{2n-1} \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 - n + 1}{2n^2 + n + 1} \right)^{n+2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{\frac{2n^2 + n + 1}{-2n}} \right]^{\frac{-2n}{2n^2 + n + 1}(n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \right)^{\frac{2n^2 + n + 1}{-2n}} \right]^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - 4n}{2n^2 + n + 1}} \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e}.\end{aligned}$$

Aici,

$$(z_n)_{n \geq 1} : z_n = \frac{2n}{2n^2 + n + 1} \rightarrow 0 \text{ pentru } n \rightarrow \infty.$$

2 Criterii de majorare-minorare

Se va observa că dacă termenii unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ pot fi minorați cu termeni „oricât de mari” ai unui șir $(a_n)_{n \geq 0}$ (i.e. $(a_n)_{n \geq 0}$ are limita $+\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mari” (i.e. $(x_n)_{n \geq 0}$ are tot limita $+\infty$). De asemenea, dacă termenii unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ pot fi majorați cu termeni „oricât de mici” ai unui șir $(b_n)_{n \geq 0}$ (i.e. $(b_n)_{n \geq 0}$ are limita $-\infty$), atunci ei sunt de asemenea „oricât de mici” (i.e. $(x_n)_{n \geq 0}$ are tot limita $-\infty$).

Teorema 2.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale.

1. Dacă există un șir de numere reale $(a_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ și un rang $n_a \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_n \leq x_n$ pentru orice $n \geq n_a$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.
2. Dacă există un șir de numere reale $(b_n)_{n \geq 0}$ cu proprietatea că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ și un

rang $n_b \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n \leq b_n$ pentru orice $n \geq n_b$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Exercițiu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = n + (-1)^n$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$.

Soluție. Are loc inegalitatea $x_n \geq n - 1$ pentru orice $n \geq 0$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - 1) = \infty$, de unde concluzia.

Pentru a arăta că limita unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ este $l \in \mathbb{R}$, poate fi studiată diferența dintre termenii șirului și limita acestuia. Teorema următoare afirmă faptul că dacă această diferență poate fi estimată potrivit, cu valori din ce în ce mai mici (α_n de mai jos poate fi înțeles ca o eroare de aproximare), atunci într-adevăr șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita l .

Teorema 2.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale și $l \in \mathbb{R}$. Dacă există un șir $(\alpha_n)_{n \geq 0}$ de numere reale pozitive și un rang oarecare $n_0 \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$|x_n - l| \leq \alpha_n \text{ pentru orice } n \geq n_0, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$.

Exercițiu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{2n+3}{n+1}$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Soluție. Are loc relația

$$|x_n - 2| = \frac{1}{n+1}, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

De aici, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$.

Exercițiu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Soluție. Au loc relațiile

$$\left| \frac{\sin n}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n}, \text{ iar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

2.1 Produsul dintre un șir convergent la 0 și un șir mărginit

În general, nu se poate afirma nimic despre convergența sau divergența produsului dintre un șir convergent și un alt șir care nu are neapărat limită. Totuși, sub ipoteze adiționale, are loc următorul rezultat.

Teorema 2.3. *Produsul dintre un șir mărginit $(x_n)_{n \geq 0}$ și un șir $(y_n)_{n \geq 0}$ convergent la 0 este un șir convergent la 0.*

Exercițiu. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{\sin n}{n}$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Soluție.

$$x_n = \frac{\sin n}{n} = \sin n \cdot \frac{1}{n}.$$

Cum $-1 \leq \sin n \leq 1$, iar $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, primul șir este mărginit, iar cel de-al doilea este convergent la 0. Produsul lor, conform Teoremei 2.3, este un șir convergent la 0. În concluzie, limita șirului din enunț este 0.

3 Criterii de convergență utilizând raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$

Se poate deduce imediat următorul criteriu de existență a limitei radicalului de ordin n al unui șir dat. În acest mod, calculul unor limite care conțin radicali de ordin n se poate reduce la calculul unor limite de rapoarte, care pot fi mai simple decât cele dintâi.

Teorema 3.1. *Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.*

Exercițiu. Demonstrați că

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Soluție. 1. Fie $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = n$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, deci de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Convergența și divergența șirului $(a_n)_{n \geq 0}$: $a_n = l^n$, pentru care raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ are valoarea constantă $l \in [0, \infty)$, au fost discutate anterior. În cele ce urmează, vom observa că un șir cu termeni strict pozitivi $(x_n)_{n \geq 0}$ pentru care raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ are limita l , fără a fi neapărat constant, are aceeași convergență sau divergență cu $(a_n)_{n \geq 0}$, cu excepția eventuală a cazului în care $l = 1$.

Teorema 3.2. *Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir cu termeni strict pozitivi. Dacă există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, atunci*

1. Dacă $l \in [0, 1)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.
2. Dacă $l \in (1, \infty]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.

3. Dacă $l = 1$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu poate fi precizată a priori cu ajutorul limitei raportului (spunem că este un caz de dubiu).

Exercițiu. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}.$$

Soluție. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}$. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2) \cdot (2n+4)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1) \cdot (3n+4)}}{\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)}{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+4}{3n+4} = \frac{2}{3} \in (0, 1),$$

deci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

3.1 Teoremele Stolz-Césaro

Teoremele următoare, numite și **Teoremele Stolz-Césaro**, sunt aplicabile limitelor de rapoarte de șiruri de forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, care pot fi reduse la calculul unor limite de rapoarte de șiruri de forma $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n}$, posibil mai simple, mai ales dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ sunt definite cu ajutorul unor sume. Ele sunt denumite respectiv **Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$** și **Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$** pentru a indica situațiile uzuale de aplicabilitate, deși pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$ numai limita numitorului este cerută în mod explicit a fi $+\infty$.

3.1.1 Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 3.3. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale astfel încât

1. $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

2. Există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Exercițiu. Determinați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}.$$

Soluție. Fie

$$(a_n)_{n \geq 0} : a_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \dots + \sqrt[n]{n}$$

$$(b_n)_{n \geq 0} : b_n = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}$$

Deoarece $b_{n+1} - b_n = \sqrt{n} > 0$, urmează că $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător. Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$, urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$. În plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Urmează că de asemenea $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$, deci valoarea limitei din enunț este 0.

3.1.2 Teorema Stolz-Césaro pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

Teorema 3.4. Fie $(a_n)_{n \geq 0}$ și $(b_n)_{n \geq 0}$ două șiruri de numere reale astfel încât

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
2. $(b_n)_{n \geq 0}$ este strict descrescător și $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.
3. Există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Atunci există și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

4 Caracterizarea analitică a limitei unui șir

Definiția cu vecinătăți a limitei unui șir, deși utilă teoretic, este greu de verificat sau folosit în aplicații. Vom prezenta în cele ce urmează câteva caracterizări echivalente cu un pronunțat aspect numeric, utile pentru demonstrarea unor proprietăți verificabile practic.

4.1 Șiruri cu limită finită

Mai întâi, este abordată situația șirurilor convergente.

Teorema 4.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent către l dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Astfel, un șir convergent este “oricât de apropiat” de limita sa l de la un rang încolo.

4.2 Șiruri cu limită infinită

În continuare, este abordată situația șirurilor cu limită infinită, observându-se că șirurile cu limită $+\infty$ au termeni „oricât de mari” de la un rang încolo, respectiv șirurile cu limită $-\infty$ au termeni „oricât de mici” de la un rang încolo.

Teorema 4.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Atunci

1. $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita $+\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n > M$ pentru orice $n \geq n_M$.
2. $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita $-\infty$ dacă și numai dacă pentru orice $M > 0$ există un rang $n_M \in \mathbb{N}$ astfel ca $x_n < -M$ pentru orice $n \geq n_M$.

5 Puncte limită ale unui șir

5.1 Subșiruri ale șirurilor mărginite și nemărginite

A fost deja observat că nu orice șir monoton este convergent. Totuși, cu ajutorul teoremei de convergență a șirurilor monotone, putem arăta că din orice șir mărginit se poate extrage un subșir convergent, acest lucru reprezentând obiectul următorului rezultat, numit și **Lema lui Césaro**.

Teorema 5.1. Orice șir mărginit $(x_n)_{n \geq 0}$ conține un subșir convergent.

În mod asemănător, putem observa că șirurile nemărginite conțin subșiruri cu limită infinită.

Teorema 5.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir.

1. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit superior, atunci el conține un subșir cu limita $+\infty$.
2. Dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci el conține un subșir cu limita $-\infty$.

5.2 Mulțimea punctelor limită ale unui șir

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir dat. Vom numi **mulțimea punctelor limită** ale șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, notată $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$, mulțimea tuturor limitelor de subșiruri ale lui $(x_n)_{n \geq 0}$.

Mai întâi se observă că mulțimea punctelor limită ale unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ dat este totdeauna nevidă. Mai precis, dacă șirul este mărginit, atunci el conține un subșir convergent (Teorema 5.1), cu o limită oarecare l , iar în această situație $l \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$. Dacă șirul este nemărginit superior (respectiv inferior), atunci $+\infty \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$ (respectiv $-\infty \in \text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n$), conform Teoremei 5.2.

Exemplu. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = (-1)^n$. Atunci $\text{LIM}_{n \rightarrow \infty} x_n = \{-1, 1\}$. În acest scop, se observă că orice subșir cu limită (care este în mod necesar finită, deoarece $(x_n)_{n \geq 0}$ este mărginit) $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ al lui $(x_n)_{n \geq 0}$ este constant de la un rang încolo, fiind un șir convergent de numere întregi. Fiind constant de la un rang încolo, termenii săi sunt toți egali cu 1 sau -1 începând cu acel rang, iar $(x_{k_n})_{n \geq 0}$ poate avea fie limita 1, fie limita -1 .

Conform definiției, se pot observa următoarele proprietăți.

1. Dacă o infinitate de termeni ai unui șir $(x_n)_{n \geq 0}$ sunt egali cu un același număr real x , atunci putem construi un subșir convergent la x cu termenii în cauză, deci $x \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
2. Dacă un șir $(x_n)_{n \geq 0}$ are limita l , finită sau nu, atunci $l \in \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, pe post de subșir convergent la l putând lua chiar șirul $(x_n)_{n \geq 0}$.
3. Există șiruri care au o infinitate de puncte limită. De exemplu, pentru

$$(x_n)_{n \geq 0} : 1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \dots, 1, 2, 3, \dots, n, \dots,$$

orice număr natural este punct limită, întrucât $(x_n)_{n \geq 0}$ conține toate numerele naturale, repetate de o infinitate de ori.

Teorema 5.3. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită dacă și numai dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ se reduce la un singur element.

5.2.1 Limita superioară și limita inferioară a unui șir

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Vom numi atunci **limită superioară** a șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, notată $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, cel mai mare punct limită al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$. Similar, vom numi **limită inferioară** a șirului $(x_n)_{n \geq 0}$, notată $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ sau $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$, cel mai mic punct limită al șirului $(x_n)_{n \geq 0}$. Urmează că

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Exemplu. Fie $(x_n)_{n \geq 0} : x_n = (-1)^n$. Atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \{-1, 1\}$, iar

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -1, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = 1.$$

Cu aceste notații, dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit superior, atunci $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, iar dacă $(x_n)_{n \geq 0}$ este nemărginit inferior, atunci $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$. În plus, Teorema 5.3 se poate reformula atunci sub forma următoare.

Teorema 5.4. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ are limită dacă și numai dacă $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$. În această situație,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

AM1, Curs 5

Șiruri de numere reale (continuare)

1 Șiruri fundamentale (Cauchy)

Reamintim mai întâi că are loc următoarea teoremă.

Teorema 1.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale și $l \in \mathbb{R}$. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este convergent către l dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - l| < \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$.

Astfel, un șir convergent este “oricât de apropiat” de limita sa l de la un rang încolo.

În cazurile în care însă limita unui șir este dificil de intuit sau determinat numeric, poate fi util un criteriu de convergență care să nu facă apel la determinarea limitei șirului. Considerațiile de mai jos permit demonstrarea convergenței unui șir fără determinarea limitei acestuia.

Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir. Spunem că $(x_n)_{n \geq 0}$ este **șir fundamental**, sau **șir Cauchy**, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ pentru orice $m, n \geq n_\varepsilon$.

Echivalent, $(x_n)_{n \geq 0}$ este **șir Cauchy** dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|x_n - x_{n+p}| \leq \varepsilon$ pentru orice $n \geq n_\varepsilon$ și orice $p \geq 0$. Intuitiv, într-un șir Cauchy toți termenii sunt apropiați unul de celălalt de la un rang încolo.

Are loc atunci următoarea teoremă.

Teorema 1.2. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir de numere reale. Atunci $(x_n)_{n \geq 0}$ este șir Cauchy dacă și numai dacă este convergent.

Exercițiu. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este convergent.

Soluție. Vom arăta că $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este șir Cauchy. Să presupunem prin reducere la absurd că $(x_n)_{n \geq 1}$ este șir Cauchy. Conform definiției șirului Cauchy, aplicată pentru $\varepsilon = \frac{1}{3}$, există un rang $n_1 \in \mathbb{N}$ astfel ca $|x_n - x_m| \leq \frac{1}{3}$ pentru orice $m, n \geq n_1$. În particular, pentru $m = 2n$, urmează că

$$|x_n - x_{2n}| \leq \frac{1}{3} \text{ pentru orice } n \geq n_1.$$

De asemenea,

$$|x_n - x_{2n}| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \right| \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2},$$

contradicție. Urmează că $(x_n)_{n \geq 1}$ nu este șir Cauchy, deci nu este nici convergent.

Observație. Conform celor de mai sus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) = +\infty.$$

Exercițiu. Fie $(x_n)_{n \geq 1}$: $x_n = \frac{\cos x}{2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \dots + \frac{\cos nx}{2^n}$. Demonstrați că $(x_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

Soluție. Vom arăta că $(x_n)_{n \geq 1}$ este șir Cauchy. Mai întâi, observăm că au loc inegalitățile

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} + \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} + \dots + \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \left| \frac{\cos(n+1)x}{2^{n+1}} \right| + \left| \frac{\cos(n+2)x}{2^{n+2}} \right| + \dots + \left| \frac{\cos(n+p)x}{2^{n+p}} \right| \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$, există un rang $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel ca $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ pentru $n \geq n_\varepsilon$. De aici,

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon \text{ pentru orice } n \geq n_\varepsilon \text{ și orice } p \geq 0.$$

Urmează că $(x_n)_{n \geq 1}$ este șir Cauchy, deci este convergent.

Probleme recapitulative. Determinați valorile următoarelor limite de șiruri:

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n + 5^n}; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \dots + \frac{1}{\ln n} \right);$$

2 Serii numerice

Date fiind numerele reale $x_0, x_1, \dots, x_n$, în număr finit, suma lor $x_0 + x_1 + \dots + x_n$ se poate calcula fără dificultate, după regulile uzuale. Extinderea noțiunii de sumă pentru mulțimi infinite de numere nu este însă la fel de imediată. Acest lucru se poate observa încercând să se calculeze suma

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots + 1 + (-1) + \dots$$

(termenii sumei sunt, alternativ, 1 și -1). Gruparea în modul

$$(1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots + (1 + (-1)) + \dots,$$

în care suma termenilor din fiecare grup este 0, poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 0. De asemenea, gruparea în modul

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots + ((-1) + 1) + \dots,$$

poate conduce la ideea că valoarea acestei sume este 1; desigur, asocierea a două valori distincte pentru o aceeași sumă de numere reale reprezintă o situație inacceptabilă. În special, din cele de mai sus se observă faptul că în cazul adunării unui număr infinit de numere reale nu are neapărat loc proprietatea de asociativitate.

În lipsa proprietății de asociativitate, singura posibilitate de calcul a unei sume infinite rămâne de a aduna termenii din sumă unul câte unul. În concluzie, pentru a calcula o sumă de forma

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots$$

vom determina

$$\begin{aligned} S_0 &= x_0, & S_1 &= x_0 + x_1, & S_2 &= x_0 + x_1 + x_2, \dots, \\ S_n &= x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n, \dots \end{aligned}$$

și vom încerca să extragem informații despre comportarea șirului $(S_n)_{n \geq 0}$, utilizând aceste informații pentru determinarea sumei.

Numim atunci **serie numerică de termen general** x_n (sau, mai simplu, **serie de termen general** x_n) cuplul $((x_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0})$ format din șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ al termenilor seriei și șirul $(S_n)_{n \geq 0}$ al sumelor parțiale, definit după regula

$$S_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n.$$

În această situație, x_n se va numi și **termenul de rang** n sau **indice** n al seriei. Vom nota o serie de termen general x_n prin

$$x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n + \dots,$$

sau, sub formă prescurtată, prin

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n.$$

Dacă primii k termeni $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$ nu sunt definiți, vom nota seria de termen general x_n prin

$$x_k + x_{k+1} + x_{k+2} + \dots + x_n + \dots,$$

respectiv prin

$$\sum_{n=k}^{\infty} x_n.$$

Notațiile de mai sus sugerează și denumirea de „sumă infinită” pentru o serie, deși, conform exemplului anterior, sumele infinite de numere reale nu au neapărat aceleași proprietăți ca și sumele finite de numere reale, această denumire nefiind deci întrutotul justificată.

Serii convergente, serii divergente

Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **convergentă** dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este convergent, respectiv că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este **divergentă** dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este divergent. Dacă șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ are limită, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \in \overline{\mathbb{R}}$ se va numi **suma** seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Seriilor $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ nu are limită nu li se asociază nicio sumă.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Termenul general al acestei serii este $x_n = \frac{1}{2^n}$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, iar suma sa este 2.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$. Termenul general al acestei serii este $x_n = n$. Sub formă desfășurată, seria se poate scrie în modul următor

$$0 + 1 + 2 + \dots + n + \dots$$

Deoarece

$$S_n = 0 + 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} n$ este divergentă, iar suma sa este $+\infty$.

În cele ce urmează, vom preciza condiții pentru a stabili dacă o serie dată este sau nu convergentă, acolo unde este posibil determinându-se explicit și suma seriei.

Sume calculabile exact

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

Termenul general al acestei serii este $x_n = q^n$. Dacă $q \neq 1$, atunci

$$S_n = x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1 + q + \dots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1},$$

în vreme ce dacă $q = 1$, atunci $S_n = n + 1$.

Urmează atunci că seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este convergentă pentru $q \in (-1, 1)$, cu $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1-q}$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = 0$ pentru $q \in (-1, 1)$. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}, \text{ pentru } q \in (-1, 1).$$

De asemenea, pentru $q = 1$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = +\infty$, iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q = 1.$$

Dacă $q \in (1, +\infty)$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = +\infty$ pentru $q \in (1, \infty)$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă. În concluzie,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = +\infty, \text{ pentru } q \in (1, +\infty).$$

Dacă $q \in (-\infty, -1]$, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ nu există, deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1}$ nu există pentru $q \in (-\infty, -1]$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ este divergentă, acestei serii neputându-i-se asocia o sumă.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{nu este definită,} & \text{dacă } q \leq -1 \\ \frac{1}{1-q}, & \text{dacă } q \in (-1, 1) \\ +\infty, & \text{dacă } q \geq 1 \end{cases}$$

Exemplu. Fie suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n}$. Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4.$$

Exemplu. Fie suma $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n}$. Atunci termenul general al acestei serii este

$$x_n = \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \left(\frac{(-1)2^3}{9}\right)^n = \left(-\frac{8}{9}\right)^n,$$

de unde

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{3n}}{9^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{8}{9}\right)^n = \frac{1}{1 - \left(-\frac{8}{9}\right)} = \frac{9}{17}.$$

Serii telescopice

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o **serie telescopică** dacă există șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, astfel ca

$$x_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un șir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferența a doi termeni consecutivi ai acestui șir, primul cu același indice ca și indicele termenului general al seriei. În această situație,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent. În această ultimă situație,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

2.1 Divergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

A fost demonstrat că șirul

$$(S_n)_{n \geq 1} : x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$$

nu este șir Cauchy. Cum acesta este șirul sumelor parțiale asociat seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, urmează

că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. Seria de mai sus se numește și **seria armonică**, întrucât fiecare termen al seriei este media armonică a termenilor care-l înconjoară, adică $\frac{1}{n} = \frac{2}{\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}}$ pentru orice $n > 1$.

2.2 Limita termenului general

Teorema 2.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Proof. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă, cu suma l . Deoarece

$$x_n = S_n - S_{n-1} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = l$, urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obține deci următorul rezultat.

Corolar 2.1.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată este divergentă.

Exercițiu. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}; \quad 3) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}.$$

Soluție. Putem calcula limita termenului general în fiecare dintre aceste cazuri. Cum

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right]^{\frac{3n + \frac{1}{n}}{2n}} = e^{\frac{3}{2}} \neq 0,$$

seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{3n + \frac{1}{n}}$ este divergentă. Se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{2}{5} + 1\right)}{5^{n+1} \left(\frac{2}{5} + 1\right)} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$ este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$

deci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$ este divergentă.

Se poate observa de asemenea faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nu este o condiție suficientă pentru convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, dar totuși seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

AM1, Curs 6

Serii de numere reale (continuare)

1 Sume calculabile exact

1.1 Serii telescopice

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$. Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este o **serie telescopică** dacă există șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, astfel ca

$$x_n = a_n - a_{n+1} \quad \text{pentru orice } n \geq 0,$$

adică există un șir pentru care termenul general al seriei se poate scrie ca diferența a doi termeni consecutivi ai acestui șir, primul cu același indice ca și indicele termenului general al seriei. În această situație,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = (a_0 - a_1) + (a_1 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n+1}) \\ &= a_0 - a_{n+1}, \end{aligned}$$

de unde seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă dacă și numai dacă $(a_n)_{n \geq 0}$ este convergent. În această ultimă situație,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 - a_{n+1}) = a_0 - l,$$

unde $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$.

Exemplu. Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Atunci termenul general al sumei este $x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Observăm că

$$x_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+2) - (n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2},$$

de unde

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^n x_k = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}, \end{aligned}$$

iar

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2}\right) = 1.$$

2 Limita termenului general al unei serii convergente

Teorema 2.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă, atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Proof. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie convergentă, cu suma l . Deoarece

$$x_n = S_n - S_{n-1} \text{ pentru orice } n \geq 1,$$

iar $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = l$, urmează concluzia. ■

Se observă de aici că dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată nu este convergentă. Se obține deci următorul rezultat.

Corolar 2.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie dată. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ nu există, sau există și nu este 0, atunci seria dată este divergentă.

Exercițiu. Demonstrați că următoarele serii sunt divergente:

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}.$$

Soluție. Se observă că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \left(\frac{2^n}{5^n} + 1\right)}{5^{n+1} \left(\frac{2^{n+1}}{5^{n+1}} + 1\right)} = \frac{1}{5} \neq 0,$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 5^n}{2^{n+1} + 5^{n+1}}$ este divergentă. De asemenea

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n} = +\infty \neq 0,$$

deci și seria $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt[3]{n}$ este divergentă.

Se poate observa de asemenea faptul că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ nu este o condiție suficientă pentru convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ (fiind doar necesară). În acest sens, se poate observa că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$, dar totuși seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă.

2.1 Operații cu serii convergente

Întrucât, așa cum s-a menționat anterior, convergența unei serii se definește prin intermediul convergenței șirului sumelor sale parțiale, se va observa că proprietatea unor serii de a fi convergente se păstrează după efectuarea operațiilor uzuale de sumă, diferență și produs cu o constantă.

Teorema 2.2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii convergente de numere reale astfel ca $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = A$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n = B$. Atunci seria sumă $\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n)$ și seria produs cu o constantă $\sum_{n=0}^{\infty} cx_n$, $c \in \mathbb{R}$, sunt convergente. În plus, au loc relațiile

$$1. \sum_{n=0}^{\infty} x_n + y_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n + \sum_{n=0}^{\infty} y_n = A + B;$$

$$2. \sum_{n=0}^{\infty} cx_n = c \sum_{n=0}^{\infty} x_n = cA.$$

Demonstrația este imediată, utilizând proprietățile operațiilor cu șiruri convergente.

3 Serii cu termeni pozitivi

3.1 Monotonia șirului sumelor parțiale

Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi. Deoarece

$$S_{n+1} - S_n = x_{n+1} \geq 0,$$

urmează că șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este monoton crescător. Acest lucru are consecințe importante asupra convergenței unei serii cu termeni pozitivi, deoarece dacă $(S_n)_{n \geq 0}$ este monoton, o condiție necesară și suficientă pentru convergența sa este ca el să fie mărginit superior.

Altfel spus, deoarece șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \geq 0}$ este deja cunoscut ca fiind monoton crescător (ceea ce nu se întâmplă pentru serii cu termeni oarecare), convergența sau divergența sa sunt mult mai ușor de studiat).

3.2 Criteriul raportului

Un criteriu util pentru studiul convergenței unor serii cu termeni pozitivi, în special a acelor pentru care termenul general conține produse, este **criteriul raportului cu limită**, indicat mai jos.

Corolar 3.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului raportului cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriilor

$$1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n};$$

Soluție. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)(3n+5)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)(2n+3)} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{2n+3} = \frac{3}{2} > 1, \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \dots (3n+2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$ este divergentă.

2) Termenul general al seriei este $x_n = \frac{2^n n!}{n^n}$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{2^n n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{2}{e} < 1, \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ este convergentă.

3.3 Criteriul Raabe-Duhamel

Criteriul Raabe-Duhamel, menționat în cele ce urmează, este în general utilizat atunci când aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. A se remarca faptul că utilizarea raportului inversat $\left(\frac{x_n}{x_{n+1}}\right)$, în contrast cu raportul $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ utilizat în cadrul criteriului raportului) conduce la obținerea unor situații inverse de convergență față

de cele obținute în criteriul raportului, respectiv „ $l > 1$ ” pentru convergență (în loc de „ $l < 1$ ” pentru criteriul raportului) și „ $l < 1$ ” pentru divergență (în loc de „ $l > 1$ ” pentru criteriul raportului).

Corolar 3.2. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului Raabe-Duhamel cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$, de unde

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)}}{\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n \cdot (2n+2)} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)} \\ &= \frac{2n+1}{2n+2}. \end{aligned}$$

Urmează că $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = 1$, deci aplicarea criteriului raportului conduce la un caz de dubiu. Atunci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+2}{2n+1} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1,$$

deci seria dată este divergentă.

3.4 Criteriul radicalului

Următorul criteriu, numit și **criteriul radicalului cu limită**, este utilizat îndeosebi pentru studierea convergenței unor serii pentru care termenul general conține puterea de ordin n (sau $n+1, 2n \dots$, etc.) a unui alt șir.

Corolar 3.3. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi astfel încât există

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.
2. Dacă $l > 1$, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.
3. Dacă $l = 1$, atunci natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ nu poate fi precizată cu ajutorul criteriului radicalului cu limită.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$.

Soluție. 1) Termenul general al seriei este $x_n = \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \left(3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2} \right)}{n^2 \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right)} \\ &= \frac{3}{2} > 1 \end{aligned}$$

deci seria $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3n^2 + 2n - 1}{2n^2 + 3n + 1} \right)^n$ este divergentă.

Exercițiu. Discutați natura seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$, unde $a > 0$.

Soluție. Termenul general al seriei este $x_n = \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$. Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + 1}{n + 2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \left(a + \frac{1}{n} \right)}{n \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = a.$$

De aici, $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{an + 1}{n + 2} \right)^n$ este convergentă dacă $a \in (0, 1)$, respectiv divergentă dacă $a > 1$.

Dacă $a = 1$, urmează că $x_n = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$, deci

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-(n+2)} \right]^{-\frac{n}{n+2}} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Urmează că $(x_n)_{n \geq 0}$ nu este convergent la 0, iar $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$ este divergentă.

3.5 Convergența seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

Termenul general al seriei este $x_n = \frac{1}{n^p}$. Urmează că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p - 1}{\frac{1}{n}} = p.$$

Conform criteriului Raabe-Duhamel cu limită, seria armonică generalizată $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ este convergentă pentru $p > 1$, respectiv divergentă pentru $p < 1$. Pentru $p = 1$ se obține seria armonică uzuală, care este divergentă.

Discuția de mai sus poate fi sistematizată sub următoarea formă prescurtată

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ este } \begin{cases} \text{divergentă,} & \text{dacă } p \leq 1 \\ \text{convergentă,} & \text{dacă } p > 1 \end{cases}.$$

3.6 Criterii de comparație

În cele ce urmează vom prezenta un set de criterii care permit analiza convergenței sau divergenței unei serii cu termeni pozitivi date prin stabilirea unei relații între termenii seriei și termenii unei alte serii a cărei natură este cunoscută (deseori cu seria armonică generalizată). Revenind la faptul că, pentru serii cu termeni pozitivi, convergența acestora este echivalentă cu nemărginirea șirului sumelor parțiale, interpretarea următorului rezultat este imediată: o serie ai cărei termeni sunt mai mari decât termenii unei serii „nemărginite” (i.e., divergente) date este de asemenea „nemărginită” (i.e., divergentă), în vreme ce o serie ai cărei termeni sunt mai mici decât termenii unei serii „mărginite” (i.e., convergente) date este de asemenea „mărginită” (i.e., convergentă).

Teorema 3.1. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n \leq y_n \quad \text{pentru orice } n \geq N,$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Date fiind $c \in (0, \infty)$ și o serie cu termeni pozitivi $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$, se observă că seriile $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} cz_n$ au aceeași natură. În aceste condiții, se poate obține ușor următorul corolar al teoremei de mai sus, numit **criteriul de comparație cu inegalități**.

Corolar 3.4. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ două serii cu termeni pozitivi și fie $c \in (0, \infty)$. Dacă există $N \in \mathbb{N}$ astfel ca

$$x_n \leq cy_n \text{ pentru orice } n \geq N, \quad (1)$$

atunci au loc următoarele proprietăți.

1. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă.

Exercițiu. Studiați convergența următoarelor serii:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}.$$

Soluție. 1) Deoarece $\frac{1}{n+2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ iar seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$ este de asemenea convergentă.

2) Deoarece $\frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n^2}$, iar seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este convergentă, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+n+1}}$ este de asemenea convergentă.

Putem atunci obține următorul rezultat, numit **criteriul de comparație cu limită**.

Corolar 3.5. Fie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ o serie cu termeni pozitivi și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ o serie cu termeni strict pozitivi astfel încât există $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$. Au loc următoarele proprietăți:

1. Dacă $l < \infty$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este convergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este convergentă.

2. Dacă $l > 0$, iar $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ este divergentă, atunci și $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este divergentă.

3. Dacă $l \in (0, \infty)$, atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ au aceeași natură.

În multe situații, un bun termen de comparație este seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $\frac{1}{n^p}$ precizând comportarea „aproximativă” a termenului general al seriei de studiat. De exemplu, în studiul convergenței seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ este utilă comparația cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$, întrucât $\frac{1}{n^3 - 2n + 1}$ are comportarea „aproximativă” a lui $\frac{1}{n^3}$ pentru $n \rightarrow \infty$, iar în studiul convergenței seriei $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ este utilă comparația cu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$, întrucât $\frac{n}{n^2\sqrt{n} - n + 1}$ are comportarea „aproximativă” a lui $\frac{n}{n^2\sqrt{n}} = \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

Exemplu. Studiați convergența seriilor:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}; \quad 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 6n + 11}.$$

Soluție. 1) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3}}{\sqrt{n^3 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este convergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{3}{2} > 1$, urmează că și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3 + n}}$ este convergentă.

2) Vom compara seria dată cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Se obține că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+2}{n^2 + 6n + 11}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+2)}{n^2 + 6n + 11} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{6}{n} + \frac{11}{n^2}} = 1 \in (0, \infty),$$

de unde seriile $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 6n + 11}$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ au aceeași natură. Cum cea din urmă este divergentă, fiind o serie armonică, urmează că și $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n^2 + 6n + 11}$ este divergentă.

AM1, Curs 7

Serii de numere reale (continuare)

1 Serii cu termeni pozitivi

1.1 Criteriul de condensare

Un criteriu util pentru stabilirea, între altele, a convergenței seriei armonice generalizate, sau a unor serii ai căror termeni generali conțin logaritmi, este următorul rezultat, numit **criteriul de condensare**.

Teorema 1.1. Fie $(x_n)_{n \geq 0}$ un șir monoton descrescător cu termeni pozitivi. Atunci seriile $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ și $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x_{2^n}$ au aceeași natură.

Exercițiu. Studiați convergența seriei $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Soluție. Deoarece $(x_n)_{n \geq 2}$: $x_n = \left(\frac{1}{n \ln n}\right)_{n \geq 2}$ este un șir monoton descrescător de numere strict pozitive, urmează conform criteriului de condensare că $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ și $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ au aceeași natură. Cum $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2}$ este divergentă, fiind seria armonică multiplicată cu o constantă, urmează că și $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ este divergentă.

2 Serii cu termeni oarecare

Seria $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi **serie cu termeni oarecare** dacă are atât o infinitate de termeni pozitivi, cât și o infinitate de termeni negativi.

Un caz particular de serii cu termeni oarecare sunt **seriile alternante**. O serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ se va numi **alternantă** dacă termenii săi sunt alternativ pozitivi și negativi de la un rang încolo, adică există $N_3 \in \mathbb{N}$ pentru care $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n \geq 0}$ este un șir de termeni nenuli cu semn constant. În concluzie, pentru o serie alternantă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, fie $x_n = (-1)^n a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, fie $x_n = (-1)^{n+1} a_n$ pentru orice $n \geq N_3$, unde $(a_n)_{n \geq 0}$ este un șir cu termeni strict pozitivi. În cele ce urmează, conform faptului că eliminarea unui număr finit de termeni ai seriei nu modifică natura acestuia, vom presupune acolo unde este necesar că proprietatea de alternanță are loc începând cu primul termen al seriei.

Comparativ cu situația seriilor cu termenilor pozitivi, pentru care studiul convergenței se reduce la studiul mărginirii șirului sumelor parțiale, deoarece monotonia acestuia

este asigurată **a priori**, situația seriilor cu termeni oarecare este mult mai complicată, întrucât această cale de abordare se pierde, șirul sumelor parțiale nemaifiind monoton. În concluzie, nici criteriile de convergență obținute anterior (criteriile de comparație, ale raportului și radicalului, ș. a. m. d.) nu mai sunt valabile.

În situația în care seria care are ca termen general modulul termenului general al seriei inițiale este convergentă, convergența seriei inițiale se va obține din convergența acesteia din urmă; desigur, convergența celei de-a doua serii este mult mai simplu de obținut, fiind vorba despre o serie cu termeni pozitivi. În fine, pentru cazul particular al seriilor alternante, convergența acestora se poate obține demonstrând monotonia șirului obținut prin eliminarea factorului alternant.

2.1 Serii alternante. Criteriul Leibniz

Pentru cazul particular al seriilor alternante, se poate observa că are loc următorul rezultat, numit **criteriul lui Leibniz**.

Teorema 2.1. Dacă $(y_n)_{n \geq 0}$ este un șir monoton descrescător și convergent la 0, atunci $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y_n$ este convergentă.

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă.

Soluție. Deoarece $(y_n)_{n \geq 0}$: $y_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este monoton descrescător și convergent la 0, urmează că seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+2}}$ este convergentă, conform criteriului lui Leibniz.

2.2 Serii absolut convergente

Cu ajutorul criteriului lui Leibniz, se poate observa că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ este convergentă. Totuși, seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ este divergentă. În același timp, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este convergentă, iar seria asociată a modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ este de asemenea convergentă.

Aceste exemple sugerează o posibilă clasificare a seriilor convergente în serii pentru care seria asociată a modulelor este convergentă, respectiv divergentă. În acest sens, o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este convergentă se va numi **absolut convergentă**, în vreme ce o serie convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ pentru care $\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$ este divergentă se va numi **condiționat convergentă** sau **semiconvergentă**. Din cele de mai sus, se

observă că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ este absolut convergentă, în vreme ce seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ nu este convergentă (este condiționat convergentă, sau semiconvergentă).

Se observă de asemenea că pentru serii cu termeni pozitivi noțiunile de convergență și absolută convergență coincid, deoarece modulul unui număr pozitiv este chiar numărul în cauză. În general, pentru serii cu termeni oarecare, convergența nu implică absolută convergență, după cum se poate deduce din exemplul seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ de mai sus. Totuși, are loc implicația inversă, în sensul că orice serie absolut convergentă este convergentă.

Teorema 2.2. Dacă o serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ este absolut convergentă, atunci ea este și convergentă.

Exercițiu. Demonstrați că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ este convergentă, fără a fi absolut convergentă.

Soluție. Deoarece

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

iar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă, fiind o serie armonică generalizată cu $p = \frac{1}{2} < 1$, urmează că seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ nu este absolut convergentă. Ea este doar convergentă, conform criteriului lui Leibniz (aplicat similar exemplului de mai sus).

3 Proprietăți topologice ale lui $\overline{\mathbb{R}}$

În cele ce urmează, vom studia unele proprietăți ale mulțimilor din $\overline{\mathbb{R}}$. Astfel, vom caracteriza „locul” unui punct în cadrul unei mulțimi (în limba greacă, „topos” înseamnă „loc”) sau „apropierea” unui punct de o mulțime dată, clasificând de asemenea submulțimile lui $\mathbb{R}$ cu un număr infinit de elemente după cum aceste elemente pot fi numărate sau nu.

3.1 Puncte de acumulare

Reamintim mai întâi următoarele definiții.

1. Numim **vecinătate** a unui punct $x \in \mathbb{R}$ orice mulțime $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval deschis incluzându-l pe x , adică pentru care există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$x \in (a, b) \subseteq M.$$

2. Numim **vecinătate** a lui $+\infty$ orice mulțime $M \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $(a, \infty]$, cu $a \in \mathbb{R}$.

3. Numim **vecinătate** a lui $-\infty$ orice mulțime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ care conține un interval de forma $[-\infty, a)$, cu $a \in \mathbb{R}$.

Fie o mulțime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **punct de acumulare** al mulțimii A dacă orice vecinătate V (oricât de mică!) a lui a conține puncte ale lui A diferite de a , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), (V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset.$$

Exemplul 1 $a = 0$ este punct de acumulare al mulțimii $A = (0, 1)$ deoarece orice vecinătate V a lui 0 conține un interval $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, deci și puncte ale lui $(0, 1)$ diferite de 0 . Altfel spus,

$$(V \setminus \{0\}) \cap A \supset (0, \varepsilon) \neq \emptyset.$$



Figure 1: $A = (0, 1)$, $a = 0$ este punct de acumulare.

Exemplul 2 $a = 3$ nu este punct de acumulare al mulțimii $A = (0, 1) \cup \{3\}$ deoarece vecinătatea $V = (2, 4)$ a lui 3 nu conține puncte ale lui A diferite de 3 . Altfel spus,

$$(V \setminus \{3\}) \cap A = \emptyset.$$

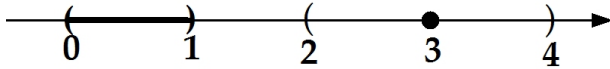


Figure 2: $A = (0, 1) \cup \{3\}$, $a = 3$ nu este punct de acumulare

Exemplul 3 $a = +\infty$ este punct de acumulare al mulțimii $A = \mathbb{N}$ deoarece orice vecinătate V a lui $+\infty$ conține un interval $I = (M, +\infty]$, $M > 0$, deci și puncte ale lui $\mathbb{N}$ diferite de $+\infty$. Altfel spus,

$$(V \setminus \{+\infty\}) \cap A = \{[M] + 1, [M] + 2, \dots\} \neq \emptyset.$$

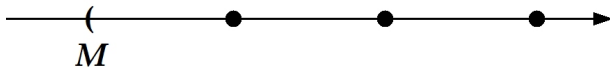


Figure 3: $A = \mathbb{N}$, $a = +\infty$ este punct de acumulare

Din exemplele de mai sus se deduc câteva consecințe privind localizarea punctelor de acumulare. Mai întâi, un punct de acumulare al unei mulțimi A poate să nu fie

element al acelei mulțimi (exemplul 1). De asemenea, nu orice element al unei mulțimi A este neapărat punct de acumulare al acelei mulțimi (exemplul 2). Din cel de-al treilea exemplu, se poate observa că punctele de acumulare ale unei mulțimi pot fi și la infinit.

Mulțimea tuturor punctelor de acumulare ale mulțimii A se numește atunci **mulțimea derivată** a lui A și se notează A' , în vreme ce un element al unei mulțimi A care nu este punct de acumulare al acelei mulțimi se numește **punct izolat** al lui A . De aici se poate observa că $a \in A$ este punct izolat al lui A dacă există o vecinătate V a lui A care nu conține puncte din A .

Exemple. 1. Dacă $A = (0, 3) \cup \{5\}$, atunci $A' = [0, 3]$, iar 5 este punct izolat al lui A .

2. Dacă $A = \{0, 1, 2\}$, atunci $A' = \emptyset$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

3. Dacă $A = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}$, atunci $A' = \{0\}$, toate elementele lui A fiind puncte izolate.

Alegând în mod potrivit în definiția unui punct de acumulare vecinătăți V din ce în ce mai mici se obțin puncte ale lui A diferite de a care sunt din ce în ce mai aproape de a . În acest mod se poate obține următoarea caracterizare echivalentă a unui punct de acumulare cu ajutorul șirurilor, exprimând faptul că o mulțime care are un punct de acumulare a conține elemente „oricât de apropiate” de a și diferite de a .

Teorema 3.1. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Atunci $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al lui A dacă și numai dacă există un șir $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de elemente ale lui A , diferite de a , cu limita a .

Din cele de mai sus, observând că șirul $\{a_n\}_{n \geq 0}$ poate fi ales cu termenii diferiți între ei (vezi procedeul său de construcție), deducem că o mulțime A care are un punct de acumulare a este în mod necesar infinită. În particular, o mulțime finită nu are puncte de acumulare, toate elementele sale fiind deci puncte izolate.

De asemenea, din aceeași observație se obține în mod imediat următorul rezultat.

Corolar 3.1. Un punct $a \in \overline{\mathbb{R}}$ este punct de acumulare al unei mulțimi $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ dacă și numai dacă orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(a)$ conține o infinitate de elemente ale lui A .

3.2 Puncte aderente

Fie o mulțime $A \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Vom spune că $a \in \overline{\mathbb{R}}$ se numește **punct aderent** al mulțimii A dacă orice vecinătate V a lui a conține puncte ale lui A , adică

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Cum definiția unui punct aderent este mai puțin restrictivă decât definiția unui punct de acumulare (este necesar ca $V \cap A \neq \emptyset$, în loc de $(V \setminus \{a\}) \cap A \neq \emptyset$, când cea din urmă relație este satisfăcută, fiind satisfăcută în mod evident și cea dintâi), urmează că orice punct de acumulare al unei mulțimi A este în același timp și punct aderent al acelei mulțimi.

De asemenea, deoarece $a \in V$ pentru orice $V \in \mathcal{V}(a)$, urmează că $a \in V \cap A$ pentru orice $a \in A$ și orice $V \in \mathcal{V}(a)$, deci $V \cap A \neq \emptyset$. De aici, orice $a \in A$ este punct aderent al lui A .

Mulțimea tuturor punctelor aderente ale mulțimii A se numește atunci **aderența** sau **închiderea** mulțimii A și se notează $\bar{A}$. Din cele de mai sus se observă că $A \subseteq \bar{A}$ și $A' \subseteq \bar{A}$.

În mod analog Teoremei 3.1 se poate demonstra următorul rezultat, care afirmă faptul că A conține, pe lângă elementele din A , și limitele de șiruri cu termeni din A .

Teorema 3.2. Fie $A \subseteq \mathbb{R}$. Atunci $a \in \bar{A}$ este punct aderent al lui A dacă și numai dacă există un șir $\{a_n\}_{n \geq 0}$ de elemente ale lui A , cu limita a .

Exemple. 1. Dacă $A = \{0, 1, \dots, n\}$, atunci $\bar{A} = A$.

2. Dacă $A = (0, 1)$, atunci $\bar{A} = [0, 1]$.

3. Dacă $A = \mathbb{Q}$, atunci $\bar{A} = \mathbb{R}$, deoarece orice număr real este limita unui șir de numere raționale, $+\infty$ este limita șirului $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = n \in \mathbb{Q}$, iar $-\infty$ este limita șirului $(x_n)_{n \geq 0}$: $x_n = -n \in \mathbb{Q}$.

3.3 Puncte interioare

Fie o mulțime $A \subseteq \mathbb{R}$. Vom spune că $a \in \mathbb{R}$ se numește **punct interior** al mulțimii A dacă A este vecinătate pentru a . Deoarece A este vecinătate pentru a , rezultă că $a \in A$, adică un punct interior al unei mulțimi aparține în mod necesar acelei mulțimi.

Conform definiției vecinătății unui punct, urmează că $a \in \mathbb{R}$ este punct interior al lui A dacă există (c, d) astfel ca $a \in (c, d) \subseteq A$, respectiv $+\infty$ este punct interior lui A dacă există $(c, \infty]$ astfel ca $+\infty \in (c, \infty] \subseteq A$, iar $-\infty$ este punct interior lui A dacă există $[-\infty, d)$ astfel ca $-\infty \in [-\infty, d) \subseteq A$. De asemenea, dacă A nu conține intervale, atunci A nu are puncte interioare, neputând fi vecinătate pentru niciun punct al său. În cele ce urmează, prin „interval deschis I ” vom înțelege un interval de tip (c, d) , $(c, \infty]$ sau $[-\infty, d)$, potrivit cu situația în care este utilizat.

Exemple. 1. $a = \frac{1}{2}$ este punct interior al mulțimii $A = [0, 1) \cup 2$ deoarece $a \in (0, 1) \subseteq A$, dar $a = 0$ și $a = 2$ nu sunt puncte interioare ale lui A , întrucât A nu conține intervale deschise în care se află 0 și 2, neconținând nici numere negative, nici numere mai mari ca 2.

2. $A = \mathbb{Q}$ nu are puncte interioare deoarece nu conține intervale.

Mulțimea tuturor punctelor interioare ale mulțimii A se numește atunci **interiorul** mulțimii A și se notează $\overset{\circ}{A}$. De asemenea, $a \in \mathbb{R}$ se va numi **punct exterior** al mulțimii A dacă cA (complementara mulțimii A) este vecinătate pentru a .

4 Limita unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ne punem problema de a studia comportarea lui f în apropierea unui punct dat $x_0 \in \mathbb{R}$, în sensul de a observa dacă pentru valori x ale

argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcției se apropie și ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări și restricții. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcției f pentru argumente apropiate de x_0 și nu valoarea $f(x_0)$ însăși. De fapt, f poate nici să nu fie definită în x_0 , adică nu este necesar ca x_0 să aparțină lui D . Totuși, este necesar ca D să conțină valori x ale argumentului oricât de apropiate de x_0 , adică x_0 trebuie să fie punct de acumulare al lui D . Mai mult, nu este necesar ca x_0 să fie finit, el putând fi $-\infty$ sau $+\infty$.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D'$, vom spune că funcția f **are limita** $l \in \mathbb{R}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota $f(x) \rightarrow l$ **pentru** $x \rightarrow x_0$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, spunându-se și că $f(x)$ **tinde la** l **pentru** x **tinzând la** x_0 .

Se observă că dacă x_0 nu este punct de acumulare al lui D , adică dacă x_0 este punct izolat al lui D sau punct exterior lui D , atunci problema existenței limitei lui f în D nu are sens, întrucât D nu conține valori ale argumentului x oricât de apropiate de x_0 .

De asemenea, într-un mod similar demonstrației rezultatului corespunzător privind limite de șiruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcții există, atunci aceasta este unică.

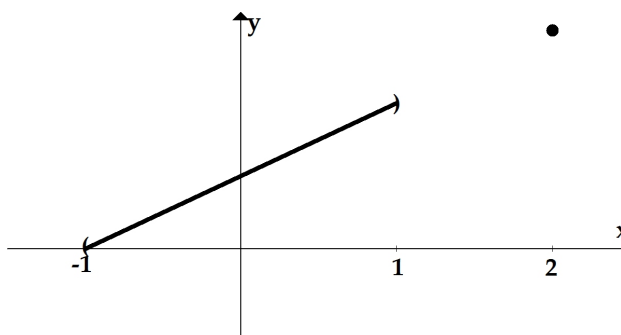
Example. 1. Fie $f : (-1, 1) \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, iar

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, problema

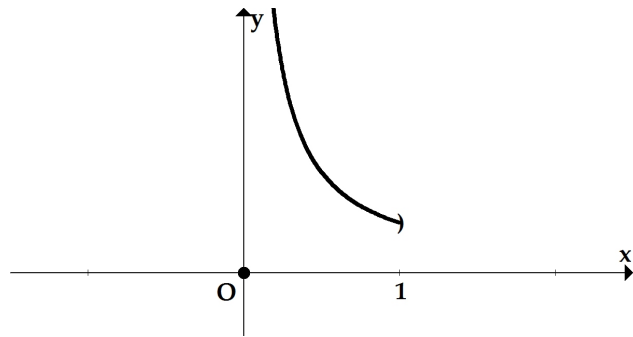
existenței limitei lui f în $x_0 = 1$ având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiție, chiar dacă nu aparține acestuia. În același timp, problema existenței

limitei lui f în $x_0 = 2$ nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiție. În mod similar, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 3$ nu are sens, deoarece acesta este punct exterior domeniului de definiție.



2. Fie $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, în timp ce $f(0) = 0$, deci o funcție poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcției în acel punct. În general, dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D'$, se poate întâmpla ca $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, adică val-



oarea limitei unei funcții într-un punct poate fi diferită de valoarea funcției în acel punct. Funcțiile care verifică egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ se numesc **funcții continue în x_0** și vor fi studiate ulterior.

AM1, Curs 8

Limite de funcții

1 Limita unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Ne punem problema de a studia comportarea lui f în apropierea unui punct dat $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, în sensul de a observa dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcției se apropie și ele de o valoare reală fixă sau sunt arbitrar de mari, respectiv arbitrar de mici.

Formulată în acest sens, suficient de intuitiv dar relativ imprecis, problema necesită unele clarificări și restricții. Din cele de mai sus, se poate observa faptul că sunt de interes valorile funcției f pentru argumente apropiate de x_0 și nu valoarea $f(x_0)$ însăși. De fapt, f poate nici să nu fie definită în x_0 , adică nu este necesar ca x_0 să aparțină lui D . Totuși, este necesar ca D să conțină valori x ale argumentului oricât de apropiate de x_0 , adică x_0 trebuie să fie punct de acumulare al lui D . Mai mult, nu este necesar ca x_0 să fie finit, el putând fi $-\infty$ sau $+\infty$.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D'$, vom spune că funcția f **are limita** $l \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x \neq x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota $f(x) \rightarrow l$ **pentru** $x \rightarrow x_0$ sau $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, spunându-se și că $f(x)$ **tinde la** l **pentru** x **tinzând la** x_0 .

Se observă că dacă x_0 nu este punct de acumulare al lui D , adică dacă x_0 este punct izolat al lui D sau punct exterior lui D , atunci problema existenței limitei lui f în D nu are sens, întrucât D nu conține valori ale argumentului x oricât de apropiate de x_0 .

De asemenea, într-un mod similar demonstrației rezultatului corespunzător privind limite de șiruri, se poate demonstra că dacă limita unei funcții există, atunci aceasta este unică.

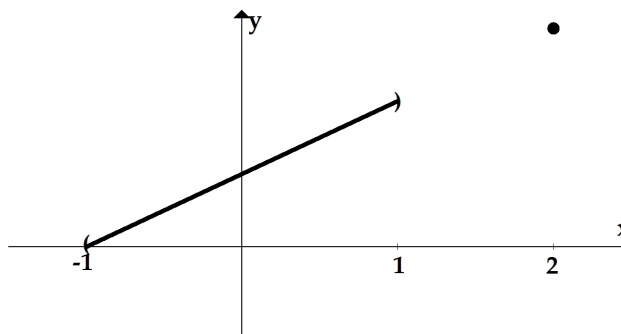
Exemple. 1. Fie $f : (-1, 1) \cup \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$.

Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$, iar

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, problema

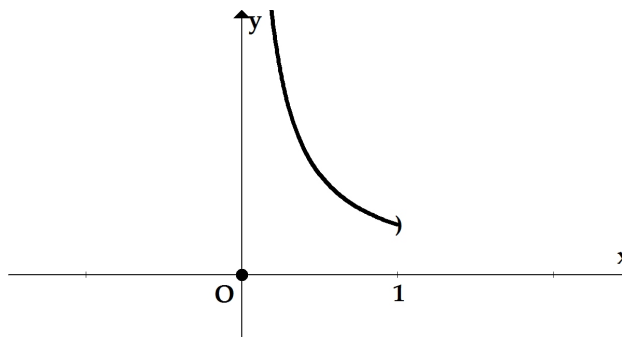
existenței limitei lui f în $x_0 = 1$ având sens, deoarece acesta este punct de acumulare al domeniului de definiție, chiar dacă nu aparține acestuia. În același timp, problema existenței

limitei lui f în $x_0 = 2$ nu are sens, deoarece acesta este punct izolat al domeniului de definiție. În mod similar, problema existenței limitei lui f în $x_0 = 3$ nu are sens.



2. Fie $f : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 1) \\ 0, & x = 0 \end{cases}$.

Atunci $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$, în timp ce $f(0) = 0$, deci o funcție poate avea într-un punct dat o limită diferită de valoarea funcției în acel punct. În general, dacă $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, iar $x_0 \in D'$, se poate întâmpla ca $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$, adică val-



oarea limitei unei funcții într-un punct poate fi diferită de valoarea funcției în acel punct. Funcțiile care verifică egalitatea $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ se numesc **funcții continue în x_0** și vor fi studiate ulterior.

1.1 Teorema de caracterizare cu șiruri

Teorema următoare, denumită și **teorema de caracterizare cu șiruri a limitei unei funcții într-un punct** sau **teorema de caracterizare Heine a limitei unei funcții într-un punct**, permite transferul proprietăților și regulilor de calcul ale limitelor de șiruri la limite de funcții.

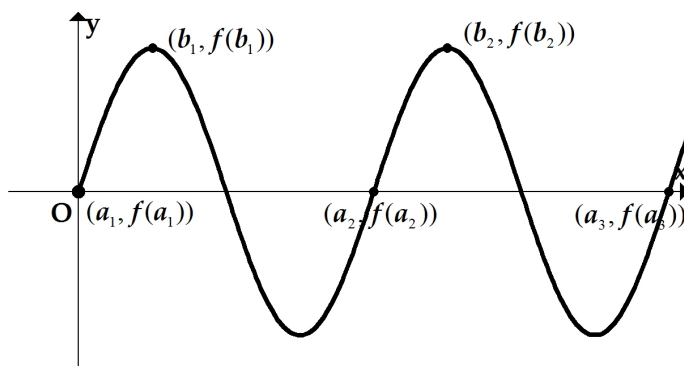
Teorema 1.1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$. Atunci f are limita l în x_0 (finită sau infinită) dacă și numai dacă pentru orice șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel încât $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, urmează că șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita l .

1.1.1 Condiții suficiente ca o funcție să nu aibă limită într-un punct

Conform teoremei de mai sus, se observă că dacă este îndeplinită una dintre condițiile următoare, atunci funcția $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nu are limită în $x_0 \in D'$.

1. Există două șiruri $(a_n)_{n \geq 0}$, $(b_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n, b_n \in D$, $a_n, b_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar șirurile de valori $(f(a_n))_{n \geq 0}$, $(f(b_n))_{n \geq 0}$ au limite diferite l_1 și l_2 .
2. Există un șir $(a_n)_{n \geq 0}$ cu limita x_0 astfel ca $a_n \in D$, $a_n \neq x_0$ pentru orice $n \geq 0$, iar șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ nu are limită.

Exemplu. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ nu are limită la $+\infty$. În acest sens, să observăm că pentru șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(f(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(f(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1.



De fapt, cu un raționament asemănător se poate observa că are loc următoarea proprietate mai generală.

Teorema 1.2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodică și neconstantă. Atunci f nu are limită la $+\infty$ sau $-\infty$.

În particular, teorema de mai sus atestă faptul că funcțiile trigonometrice directe uzuale nu au limită la $\pm\infty$.

1.2 Limite laterale

În situația în care argumentul x se apropie de punctul x_0 dat doar prin valori mai mici, respectiv mai mari decât x_0 , se obține conceptul de limită laterală.

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la stânga al mulțimii D), vom spune că funcția f **are limită la stânga** $l_s \in \overline{\mathbb{R}}$ în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_s)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x < x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l_s, \text{ sau } \lim_{x \nearrow x_0} f(x) = l_s, \text{ sau } f(x_0 - 0) = l_s.$$

Similar, vom spune că funcția f **are limită la dreapta** $l_d \in \overline{\mathbb{R}}$ în $x_0 \in (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică pentru x_0 punct de acumulare la dreapta al mulțimii D) dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(l_d)$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$, $x > x_0$, urmează că $f(x) \in V$. În acest caz, vom nota

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d, \text{ sau } \lim_{x \searrow x_0} f(x) = l_d, \text{ sau } f(x_0 + 0) = l_d.$$

Limitele la stânga și la dreapta ale unei funcții într-un punct x_0 se mai numesc și **limite laterale** în x_0 .

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 0 \\ 100, & x = 0 \\ x + 2, & x > 0 \end{cases}$. Se observă că, pentru $x_0 = 0$,

$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} (x + 1) = 1$, iar $l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x + 2) = 2$. Nicuna dintre cele două valori nu este însă egală cu 100, valoarea funcției în punct!

1.3 Limitele unor funcții elementare

1.3.1 Limitele funcțiilor polinomiale

Fie P o funcție polinomială de grad $k \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0.$$

Se observă că, **valoarea limitei funcției polinomiale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.**

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 + 4x + 5) = 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 5 = 25.$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} (4x^3 - 2x^2 + 6) = 4 \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 6 = 8.$

La fel ca și în cazul șirurilor, pentru calculul limitei $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x)$ se va scoate factor comun forțat x^k ($k = \text{grad } P$). Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \infty \cdot a_k = \begin{cases} +\infty, & \text{dacă } a_k > 0 \\ -\infty, & \text{dacă } a_k < 0 \end{cases}.$$

Să observăm că limita termenului de grad maxim al lui P este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a_k x^k = \infty \cdot a_k = \lim_{x \rightarrow \infty} P(x),$$

de unde se poate remarca faptul că **limita la $+\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P .**

Cu un raționament similar, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = (-\infty)^k \cdot a_k$$

deci și **limita la $-\infty$ a lui $P(x)$ este egală cu limita termenului de grad maxim al lui P .**

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 + 3x^2 - 2x + 1) = (+\infty)^5 = +\infty.$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3 + 3x^2 - \frac{1}{3}x + \sqrt{3}) = -2(-\infty)^3 = +\infty.$

1.3.2 Limitele funcțiilor raționale

Fie P, Q două funcții polinomiale de grad k , respectiv l , unde $k, l \geq 1$,

$$P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_k \neq 0,$$

$$Q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, Q(x) = b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0, \quad b_l \neq 0.$$

Se observă că, datorită proprietăților operațiilor cu limite de funcții și celor demonstrate mai sus privitoare la limita unui polinom într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$, **valoarea limitei**

funcției raționale într-un punct $x_0 \in \mathbb{R}$ în care nu se anulează numitorul se obține calculând valoarea funcției polinomiale în acel punct.

Dacă x_0 este rădăcină a lui Q ($Q(x_0) = 0$), atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)^p P_1(x)}{(x - x_0)^q Q_1(x)},$$

unde p, q sunt ordinele de multiplicitate ale rădăcinii x_0 pentru funcțiile polinomiale P , respectiv Q , iar $P_1(x_0) \neq 0$, $Q_1(x_0) \neq 0$. Se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & p = q \\ +\infty \cdot \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}, & q > p, q - p \text{ par} \\ \text{nu există,} & q > p, q - p \text{ impar} \end{cases}.$$

Exemple. 1.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x + 1}{2x^4 - 5x + 9} = \frac{2^3 + 2 \cdot 2 + 1}{2 \cdot 2^4 - 5 \cdot 2 + 9} = \frac{13}{31}.$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)^2(x - 3)}{(x - 1)^2(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x + 2} = -\frac{2}{3}.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 3)}{(x - 1)^2(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{(x - 1)(x + 2)}.$$

$$\text{Atunci } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} \text{ nu există, deoarece } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0+)} = -\infty,$$

$$\text{iar } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 3x + 2} = \frac{-2}{(0-)} = +\infty.$$

Considerăm limita $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right)$. La fel ca și în cazul șirurilor, pentru calculul acesteia se va scoate factor comun forțat x^k de la numărător ($k = \text{grad } P$), respectiv x^l de la numitor ($l = \text{grad } Q$). Se obține că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{P(x)}{Q(x)} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_l x^l + b_{l-1} x^{l-1} + \dots + b_1 x + b_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^k \left(a_k + a_{k-1} \frac{1}{x} + \dots + a_1 \frac{1}{x^{k-1}} + a_0 \frac{1}{x^k} \right)}{x^l \left(b_l + b_{l-1} \frac{1}{x} + \dots + b_1 \frac{1}{x^{l-1}} + b_0 \frac{1}{x^l} \right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b^l} = \begin{cases} 0, & \text{dacă } k < l \\ \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k = l \\ +\infty \frac{a_k}{b_l}, & \text{dacă } k > l \end{cases}. \end{aligned}$$

Să observăm că limita raportului termenilor de grad maxim este de asemenea

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_k x^k}{b_l x^l} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{k-l} \frac{a_k}{b^l},$$

de unde se poate remarca faptul că **limita lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ este egală cu limita raportului termenilor de grad maxim ai lui P și Q** , pentru $x \rightarrow +\infty$. Cu un raționament similar, se poate obține că același lucru se întâmplă și pentru $x \rightarrow -\infty$.

Exemple. 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{2x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 + 4\frac{1}{x} + 2\frac{2}{x^2})}{x^2(2 - 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} = \frac{3}{2}.$$

2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3 + 3x^2 + x - 1}{3x^2 + 4x + 6} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3(-2 + 3\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3})}{x^2(3 + 4\frac{1}{x} + 6\frac{1}{x^2})} \\ &= (-\infty) \cdot \frac{-2}{3} = +\infty. \end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 2}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(3 + 4\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2})}{x^3(4 + 3\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3})} = 0 \cdot \frac{3}{4} = 0.$$

1.3.3 Limitele radicalilor

Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$ și n este un număr natural impar, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\frac{1}{n}}) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right)^{\frac{1}{n}} = x_0^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_0},$$

iar, cu același raționament,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[n]{x} = -\infty.$$

În mod similar, dacă $x_0 > 0$ și n este un număr natural par, $n \geq 2$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

1.3.4 Limitele funcțiilor exponențiale

Fie $a > 0, a \neq 1$, și fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a^x$. Se poate observa că, dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} a \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} x} = a^{x_0}.$$

Pentru $a > 1$, se observă că f este strict crescătoare, iar $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = +\infty$. De asemenea,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{a^{-x}} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{a^u} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu notația $u = -x$, conform teoremei limitei funcției compuse.

Dacă $a \in (0, 1)$, atunci f este strict descrescătoare, iar $a = \frac{1}{b}$, $b > 1$. Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{b^x} = \frac{1}{\infty} = 0,$$

cu un raționament asemănător obținându-se că $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Adăugând și cazul $a = 1$, în cazul în care f este identic egală cu 1, discuția de mai sus se poate sistematiza sub următoarea formă

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} 0, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

1.3.5 Limitele funcțiilor logaritmice

Fie $a > 0$, $a \neq 1$, și fie $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$. Mai întâi, se observă că f este strict crescătoare pentru $a > 1$, respectiv strict descrescătoare pentru $a \in (0, 1)$.

Dacă $x_0 \in \mathbb{R}$, atunci, cum f este strict monotonă, ea are limite laterale în x_0 . Mai mult, deoarece $a^{\log_a x} = x$ pentru orice $x \in (0, \infty)$,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{\log_a x}) = \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0.$$

Deoarece

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (a^{\log_a x}) = \left(\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} a \right)^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)} = a^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)},$$

urmează că $a^{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x)} = x_0$, deci $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$. În mod similar se demon-

strează că $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} (\log_a x) = \log_a x_0$, deci există $\lim_{x \rightarrow x_0} (\log_a x) = \log_a x_0$, deoarece limitele

laterale sunt ambele egale cu această valoare.

Cu un raționament analog celui realizat pentru $x_0 \in \mathbb{R}$, obținem că

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ -\infty, & a \in (0, 1) \end{cases}, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a > 1 \\ \infty, & a \in (0, 1) \end{cases}.$$

1.3.6 Limitele unor funcții trigonometrice

1.3.7 Funcția sinus

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ și fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Se observă că

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|,$$

de unde

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R}.$$

S-a observat deja că funcția sinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = 2n\pi$, cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\sin(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2}$, de asemenea cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\sin(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția sinus nu are limită la $+\infty$, în mod analog demonstrându-se că funcția sinus nu are limită nici la $-\infty$.

1.3.8 Funcția cosinus

În mod similar celor de mai sus se demonstrează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce nici funcția cosinus nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

1.3.9 Funcția tangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{tg} x$. Conform inegalităților

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x_0| \leq \left| \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin x_0}{\cos x_0} \right| = \left| \frac{\sin(x - x_0)}{\cos x \cos x_0} \right|,$$

valabile pentru $x, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}\}$, urmează că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x < \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ u < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg}(u + n\pi) = \lim_{\substack{u \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ u < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} u = +\infty$$

ținând seama de faptul că funcția tangentă este periodică de perioadă π . În mod similar se demonstrează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi \\ x > \frac{\pi}{2} + n\pi}} \operatorname{tg} x = -\infty.$$

Se poate observa că funcția tangentă nu are limită nici la $+\infty$ nici la $-\infty$. Într-adevăr, pentru șirul $(a_n)_{n \geq 0}$, $a_n = n\pi$, cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\operatorname{tg}(a_n))_{n \geq 0}$ are limita 0, fiind constant nul, în timp ce pentru șirul $(b_n)_{n \geq 0}$, $b_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$, de asemenea cu limita $+\infty$, șirul valorilor $(\operatorname{tg}(b_n))_{n \geq 0}$ are limita 1, fiind constant egal cu 1, deci funcția tangentă nu are limită la $+\infty$, în mod analog raționându-se pentru $x \rightarrow -\infty$.

1.3.10 Funcția cotangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$. Ca mai sus, se obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0 \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{N}\}.$$

De asemenea,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow n\pi \\ x > n\pi}} \operatorname{ctg} x = \infty, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow n\pi \\ x < n\pi}} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

Se poate observa că nici funcția cotangentă nu are limita nici la $+\infty$ nici la $-\infty$.

1.3.11 Funcția arcsinus

Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = \arcsin x$. Folosind un raționament analog celui utilizat pentru a stabili limitele funcției logaritmice, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

1.3.12 Funcția arccosinus

Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$, $f(x) = \arccos x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in [-1, 1].$$

1.3.13 Funcția arctangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad \text{pentru } x_0 \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

1.3.14 Funcția arccotangentă

Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi)$, $f(x) = \operatorname{arcctg} x$. Ca mai sus, se poate obține că

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0 \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R},$$

în vreme ce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arcctg} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi.$$

1.4 Limite fundamentale (pentru c.n. $\frac{0}{0}$ și 1^∞)

Au loc relațiile:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^p - 1}{x} = p, p \in \mathbb{R}^*.$$

Exemple. 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \sin x}{\sin 4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot x}{\frac{\sin 4x}{4x} \cdot 4x} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x}}{\frac{\sin 4x}{4x}} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1}$

Fiind vorba despre cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$, vom folosi limite fundamentale. Urmează că

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x}-1}{\sqrt[3]{1+2x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x} \cdot 3x}{\frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x} \cdot 2x} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+3x)^{\frac{1}{2}}-1}{3x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{2x}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

AM1, Curs 9

Limite de funcții (continuare)

1 Limite de funcții

1.1 Caracterizarea limitei unei funcții într-un punct cu ajutorul limitelor laterale

Se poate demonstra că dacă limitele laterale într-un punct sunt egale, atunci funcția are limită în acel punct, fapt descris de următoarea teoremă.

Teorema 1.1. Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in (D \cap (-\infty, x_0))' \cap (D \cap (x_0, +\infty))'$ (adică x_0 este simultan punct de acumulare la stânga și la dreapta al mulțimii D). Atunci f are limită în x_0 dacă și numai dacă f are limite laterale în x_0 și

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l_d.$$

În acest caz, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ este egală cu valoarea comună a limitelor.

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax + 1, & x \leq 2 \\ x + 3, & x > 2 \end{cases}$. Determinați $a \in \mathbb{R}$ astfel ca f să aibă limită în $x_0 = 2$.

Soluție. Cum

$$l_s = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} (ax + 1) = 2a + 1; \quad l_d = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} (x + 3) = 5,$$

pentru existența limitei funcției f în $x_0 = 2$ este necesar și suficient ca $2a + 1 = 5$, deci $a = 2$.

1.1.1 Produsul dintre o funcție cu limita 0 și o funcție mărginită

Teorema 1.2. Fie $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D'$. Dacă f este mărginită pe o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$, iar $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, atunci $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

În teorema de mai sus, trebuie remarcat faptul că nu este necesar ca f să aibă limită în x_0 .

Exercițiu. Determinați $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x} \right)$.

Soluție. Deoarece $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x}$, este mărginită pe o vecinătate a lui $x_0 = 0$ (de fapt, f este mărginită pe întreg domeniul de definiție, deoarece $|f(x)| \leq 1$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$), iar $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x$ are limita 0 în $x_0 = 0$, urmează că $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin^2 \frac{1}{x} \right) = 0$, conform celor de mai sus.

2 Funcții continue

2.1 Continuitatea unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. În capitolul precedent s-a studiat comportarea lui f în vecinătatea unui punct dat $x_0 \in D'$, observându-se dacă pentru valori x ale argumentului apropiate de x_0 valorile $f(x)$ ale funcției se apropie și ele (sau nu) de o valoare fixă, numită limita funcției în x_0 .

În acest capitol vom pune problema particulară a apropiării acestor valori de valoarea $f(x_0)$ a funcției în x_0 ; desigur, pentru a putea vorbi despre $f(x_0)$ va fi necesar ca x_0 să aparțină domeniului de definiție D . În plus, față de studiul limitei funcției în x_0 , se va avea în vedere și cazul în care x_0 este punct izolat al lui D .

Pentru o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și pentru $x_0 \in D$, vom spune că funcția f **este continuă** în x_0 dacă pentru orice vecinătate $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât pentru orice $x \in U \cap D$ urmează că $f(x) \in V$.

Întrucât se pune în fapt o problemă înrudită cu existența limitei $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, definiția de mai sus se obține din definiția limitei unei funcții în x_0 înlocuind l cu $f(x_0)$, fiind totuși necesară înlocuirea condiției $x_0 \in D'$ cu condiția $x_0 \in D$.

Continuitatea într-un punct de acumulare

Se observă atunci că dacă x_0 este punct de acumulare al lui D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă există $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, iar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} x\right),$$

adică **operația de aplicare a funcției f comută cu operația de calculare a limitei în x_0** .

Dacă $x_0 \in D$ este punct de acumulare atât la dreapta cât și la stânga pentru D , atunci f este continuă în x_0 dacă și numai dacă există ambele limite laterale $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$

și $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$, iar

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0).$$

Continuitatea într-un punct izolat

Presupunem acum că x_0 este punct izolat al lui D și fie $V \in \mathcal{V}(f(x_0))$ o vecinătate a lui $f(x_0)$. Cum x_0 este punct izolat al lui D , există o vecinătate $U \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel încât $U \cap D = \{x_0\}$, și cum $f(x_0) \in V$, urmează că definiția funcției continue în x_0 este satisfăcută pentru acest U . Rezultă de aici că o funcție este continuă în orice punct izolat al domeniului său de definiție.

Aspecte grafice ale noțiunii de continuitate

În fapt, conceptul de continuitate își are originea în considerații privind reprezentarea grafică a funcțiilor. Astfel, din punct de vedere intuitiv, o funcție este continuă în

x_0 dacă graficul său „nu se întrerupe” în x_0 . În acest sens, să considerăm exemplele funcțiilor $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite prin

$$f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 1 \\ x-1, & x < 1 \end{cases}, \quad f_3(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}.$$

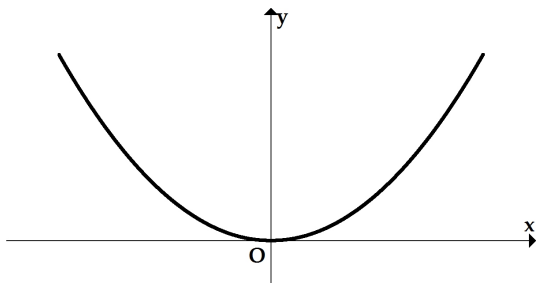


Figure 1: Graficul funcției f_1

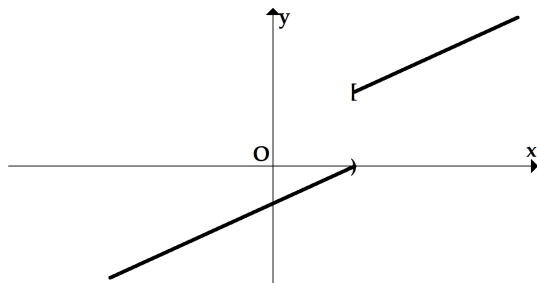


Figure 2: Graficul funcției f_2

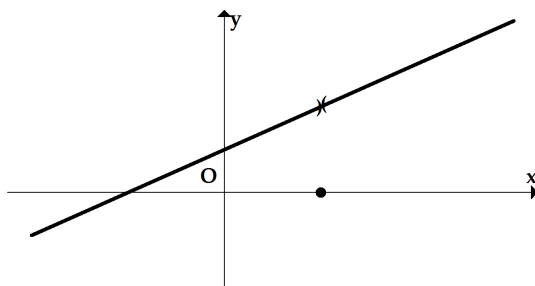


Figure 3: Graficul funcției f_3

Se observă că f_1 are limită în $x_0 = 1$ și $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = 1$, iar cum $f_1(1) = 1$, urmează că $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$, deci f_1 este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, egalitatea $\lim_{x \rightarrow 1} f_1(x) = f_1(1)$ revine la faptul că graficul lui f_1 „nu se întrerupe” în $x_0 = 1$.

De asemenea, $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f_2(x) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f_2(x) = 2$, deci f_2 nu este continuă în $x_0 = 1$, întrucât f_2 nu are limită în acest punct. Geometric, graficul lui f_2 „se întrerupe” la stânga lui $x_0 = 1$ (dar nu și la dreapta lui $x_0 = 1$).

În plus, $\lim_{x \rightarrow 1, x < 1} f_3(x) = 2 = \lim_{x \rightarrow 1, x > 1} f_3(x)$, deci f_3 are limită în $x_0 = 1$. Totuși, deoarece $f_3(1) = 0 \neq \lim_{x \rightarrow 1} f_3(x)$, urmează că f_3 nu este continuă în $x_0 = 1$. Geometric, graficul lui f_3 „se întrerupe” atât la stânga cât și la dreapta lui $x_0 = 1$.

2.2 Funcții continue pe o mulțime

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este continuă în fiecare punct al unei mulțimi $A \subseteq D$, spunem că f **este continuă pe** A . Dacă f este continuă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că f **este continuă**. Din ceea ce s-a observat în capitolul anterior, funcțiile elementare sunt continue.

2.3 Operații cu funcții continue

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat funcții continue, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 2.1. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, f, g continue în x_0 . Atunci

1. $f + g, f - g$ sunt continue în x_0 .
2. αf este continuă în x_0 pentru orice $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. fg este continuă în x_0 .
4. $\frac{f}{g}$ este continuă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$.
5. f^g este continuă în x_0 dacă $f(x_0)^{g(x_0)}$ este bine definită.

Demonstrația este imediată, obținându-se cu ajutorul proprietăților operațiilor cu limite de funcții. O proprietate asemănătoare se poate formula în mod similar pentru funcții continue pe întreg domeniul de definiție.

- Exemple.**
1. $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \log_2 x$ este continuă, fiind suma a două funcții elementare.
 2. $f : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x + 2)^x$ este continuă, întrucât $f_1 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x + 2$, $f_2 : (-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = x$ sunt continue, iar $f_1^{f_2}$ este bine definită.

Continuitatea funcției compuse

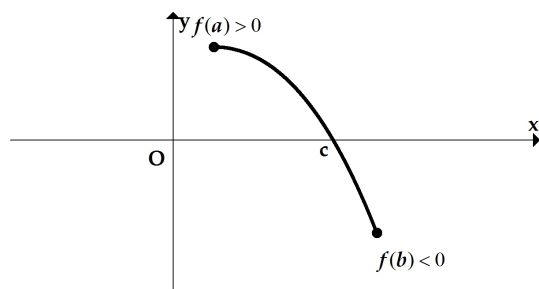
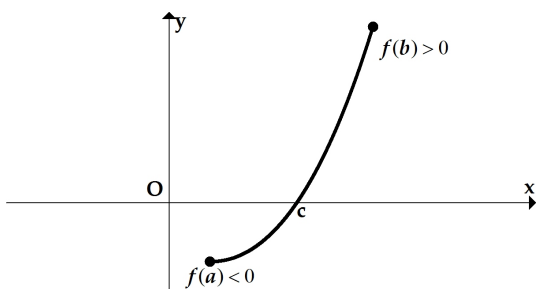
S-a observat anterior că operațiile uzuale cu funcții continue au ca rezultat tot funcții continue. Teorema de mai jos exprimă faptul că prin compunerea a două funcții continue se obține tot o funcție continuă.

Teorema 2.2. Fie $u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow E$, $f : E \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ astfel încât u este continuă în x_0 , iar f este continuă în $u(x_0)$. Atunci funcția compusă $f \circ u : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă în x_0 .

2.4 Proprietatea lui Darboux

O proprietate caracteristică a funcțiilor continue este aceea de a nu omite valori. Începem mai întâi prin a enunța următoarea proprietate, numită **lema lui Bolzano**, ce exprimă faptul că dacă o funcție continuă are valori de semne opuse la capetele unui interval, atunci ea are o rădăcină în interiorul acestui interval.

Teorema 2.3. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$, cu proprietatea că $f(a)f(b) < 0$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel ca $f(c) = 0$.

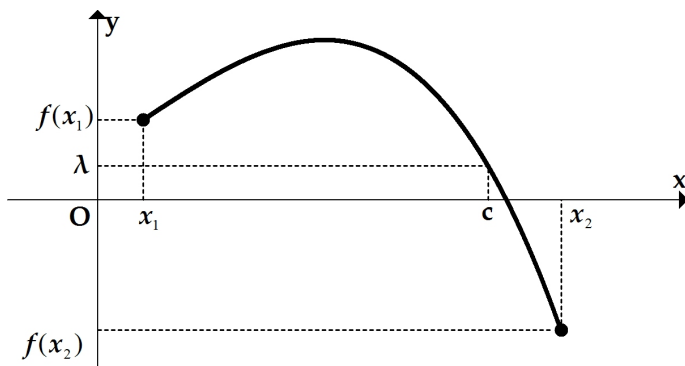


Lema lui Bolzano, enunțată mai sus, este instrumentală în determinarea aproximativă a rădăcinilor unor ecuații care nu pot fi rezolvate explicit, un exemplu fiind indicat mai jos.

Exercițiu. Demonstrați că ecuația $e^x = 2 \cos x$ are cel puțin o rădăcină în intervalul $(0, \frac{\pi}{3})$.

Soluție. Ecuația $e^x = 2 \cos x$ poate fi pusă sub forma $e^x - 2 \cos x = 0$. Fie atunci $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - 2 \cos x$. Atunci f este continuă pe $\mathbb{R}$, iar $f(0) = -1 < 0$, $f(\frac{\pi}{3}) = e^{\frac{\pi}{3}} - 1 > 0$. Cum f ia valori de semne opuse în capetele intervalului $[0, \frac{\pi}{3}]$, există cel puțin o rădăcină a ecuației $f(x) = 0$ în interiorul acestui interval, ceea ce trebuia demonstrat.

Dat un interval $I \subseteq \mathbb{R}$, vom spune că f are **proprietatea lui Darboux pe I**, sau a **valorii intermediare pe I** dacă pentru orice $x_1, x_2 \in I$ astfel ca $x_1 < x_2$ și $f(x_1) \neq f(x_2)$ și orice număr real λ cuprins între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ există $c \in (x_1, x_2)$ astfel ca $f(c) = \lambda$.



Altfel spus, o funcție f are proprietatea lui Darboux dacă odată cu două valori arbitrare $f(x_1)$ și $f(x_2)$ aceasta ia pe intervalul (x_1, x_2) și orice valori intermediare situate între $f(x_1)$ și $f(x_2)$ (adică toate valorile din intervalul deschis determinat de $f(x_1)$ și $f(x_2)$). Conform acestei observații, rezultă imediat că funcțiile cu proprietatea lui Darboux transformă intervalele în intervale.

Teorema 2.4. Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval și $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f are proprietatea lui Darboux pe I .

2.5 Funcții continue definite pe intervale închise și mărginite

A fost observat deja că funcțiile continue transformă intervalele în intervale. O precizare ce se poate aduce este că funcțiile continue transformă intervalele închise și

mărginite tot în intervale închise și mărginite. Acest lucru este exprimat în următorul rezultat, numit **teorema lui Weierstrass**.

Teorema 2.5. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă. Atunci f este mărginită și își atinge marginile pe $[a, b]$.

2.6 Puncte de discontinuitate

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$. Dacă f nu este continuă în x_0 , se spune că f este **discontinuu** în D , sau că x_0 este **punct de discontinuitate** pentru f .

Clasificarea punctelor de discontinuitate

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D$ un punct de discontinuitate pentru f . Dacă ambele limite laterale $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ și $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ ale lui f în x_0 există și sunt finite, atunci x_0 se numește

punct de discontinuitate de specia (speța) întâi. În orice altă situație (adică dacă măcar una din limitele laterale nu există, sau există, dar nu este finită), x_0 se numește **punct de discontinuitate de specia (speța) a doua**.

Exemple. 1. Fie $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f_1(x) = -1$,
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_1(x) = 1$, ambele fiind finite (dar diferite, 0 nefiind deci punct de continuitate), urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța întâi.

2. Fie $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$. Cum $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f_2(x) = +\infty$, urmează că 0 este punct de discontinuitate de speța a doua.

2.7 Prelungirea prin continuitate a unei funcții într-un punct

Fie $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f nu este definită în x_0 (deci $x_0 \notin D$), dar x_0 este punct de acumulare al domeniului D , iar f are limita finită l în x_0 , atunci funcția

$$\tilde{f} : D \cup \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in D \\ l, & x = x_0 \end{cases},$$

obținută prin definirea valorii în x_0 ca fiind egală cu valoarea limitei în același punct, celelalte valori rămânând neschimbate, se numește **prelungirea prin continuitate a lui f în x_0** . Desigur, deoarece

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l = \tilde{f}(x_0),$$

$\tilde{f}$ este continuă în x_0 , ceea ce justifică denumirea de prelungire prin continuitate.

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Deoarece $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, prelungirea prin continuitate a lui f în 0 este

$$\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \tilde{f}(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

3 Funcții derivabile. Funcții diferențiabile

Noțiunea de **derivată**, elementul fundamental al calculului diferențial, are o deosebită importanță în studiul matematic al mărimilor variabile. Problemele principale care au condus la introducerea noțiunii de derivată sunt problema tangentei, respectiv determinarea tangentei la o curbă într-un punct dat, fiind cunoscută ecuația curbei, și problema vitezei, respectiv determinarea vitezei unui punct mobil, fiind cunoscută legea de mișcare a acestuia. În cele ce urmează, vom formula aceste probleme în termeni matematici, cu ajutorul noțiunii de limită.

3.1 Problema tangentei

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe intervalul I , fie G_f graficul funcției f și fie $A(a, f(a))$ un punct pe G_f . Dorim să determinăm ecuația tangentei în A la G_f .

Se poate observa că această tangentă poate intersecta G_f și într-un alt punct decât A , iar drepte care intersectează G_f doar în A nu sunt neapărat tangente la G_f . Nu putem deci defini această tangentă ca dreapta care are în comun cu G_f doar pe A , așa cum s-a întâmplat pentru tangenta într-un punct la un cerc.

Fie $M(x, f(x))$ un alt punct pe G_f . Dreapta AM care intersectează G_f cel puțin în A și M , se va numi dreaptă **secantă**; intuitiv, vom defini tangenta în A la G_f ca poziția limită a secantei AM atunci când M tinde la A .

Cum panta dreptei AM este $m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ (presupunem că AM nu este verticală, deci $x \neq a$), urmează că panta tangentei în A la G_f este $m_{tg} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. În aceste condiții, ecuația tangentei în A la G_f este

$$y - f(a) = m_{tg}(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + m_{tg}(x - a),$$

rămânând a fi interpretate ulterior situațiile în care m_{tg} (definită ca o limită) nu există, sau există, dar este infinită.

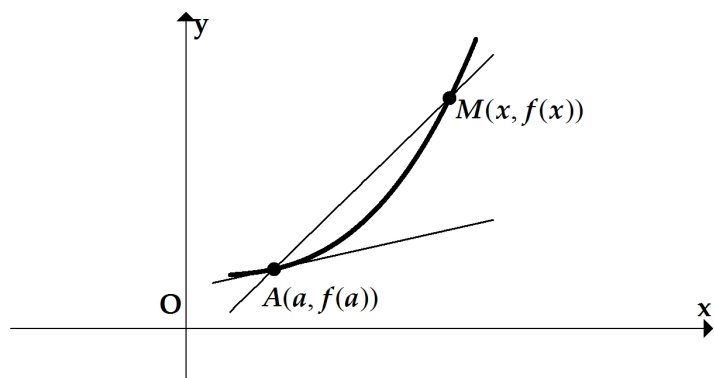


Figure 4: Tangenta în A la graficul funcției, respectiv secanta AM

3.2 Problema vitezei



Figure 5: Pozițiile punctului M la momentele t_0 , respectiv t

Considerăm un punct mobil M în mișcare rectilinie de-a lungul axei Ox , a cărei lege de mișcare este $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul inițial, iar x este abscisa punctului M .

Fie $[t_0, t]$ un interval de timp, $t > t_0$. În acest interval, M parcurge distanța $x(t) - x(t_0)$, deci viteza sa medie (viteza pe care ar trebui s-o aibă M pentru a parcurge distanța $x(t) - x(t_0)$ în timpul $t - t_0$, dacă s-ar mișca uniform) este $v_{[t_0, t]} = \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$. Totuși, cu cât intervalul de timp $[t_0, t]$ este mai mare, cu atât această viteză oferă mai puține informații despre viteza lui M la momentul t_0 . Intuitiv, intervalul $[t_0, t]$ trebuie să fie cât mai mic, iar viteza instantanee a lui M la momentul t_0 este atunci $v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$.

3.3 Derivata unei funcții într-un punct

Fie o funcție $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in D \cap D'$. Vom spune că f **are derivată** în x_0 dacă există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, numită **derivata funcției f în punctul x_0** și notată $f'(x_0)$, în vreme ce dacă această limită există și este finită vom spune că funcția f este **derivabilă în x_0** .

Raportul $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ se numește **raport incremental** și măsoară viteza de variație a funcției pe intervalul $[x_0, x]$; prin analogie cu problema vitezei indicată mai sus, putem spune că $f'(x_0)$ reprezintă **viteza de variație instantanee a funcției f în punctul x_0** .

De asemenea, cu notația $x = x_0 + h$, obținem că

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Să studiem derivabilitatea funcției f în $x_0 = 2$. Observăm că

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4, \end{aligned}$$

deci f este derivabilă în $x_0 = 2$, iar $f'(2) = 4$.

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Să studiem derivabilitatea funcției f în $x_0 = 0$.

Observăm că

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

deci f nu este derivabilă în $x_0 = 0$, dar are derivată în acest punct, iar $f'(0) = +\infty$.

Cu ajutorul noțiunii de derivată într-un punct, putem studia rezolvarea problemelor menționate anterior.

3.3.1 Ecuația tangentei într-un punct la graficul unei funcții

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $a \in D \cap D'$. Conform considerațiilor de mai sus, obținem următoarele

1. Dacă f este derivabilă în a , atunci ecuația tangentei în $A(a, f(a))$ la G_f este

$$y - f(a) = f'(a)(x - a), \quad \text{sau} \quad y = f(a) + f'(a)(x - a),$$

observându-se că panta tangentei în $A(a, f(a))$ este valoarea derivatei $f'(a)$.

2. Dacă $f'(a) = +\infty$, sau $f'(a) = -\infty$, atunci tangenta în $A(a, f(a))$ la G_f este verticală, având ecuația $x = a$.

3.3.2 Viteza unui punct material în mișcare

Fie un punct mobil M în mișcare rectilinie de-a lungul axei Ox , a cărei abscisă x este dată prin $x = x(t)$, unde t este timpul scurs de la momentul inițial. Atunci viteza instantanee a lui M la momentul t este $v(t) = x'(t)$.

AM1, Curs 10

Funcții derivabile. Funcții diferențiabile (continuare)

1 Derivatele funcțiilor elementare

Vom calcula în cele ce urmează derivatele unor funcții uzuale.

1.1 Funcția constantă

Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$, unde $c \in \mathbb{R}$. Atunci

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0,$$

deci

$$c' = 0.$$

1.2 Funcția putere

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$. Atunci

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h((x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + x^{n-1})}{h} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

deci

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Caz particular

$$(x)' = 1.$$

Cu ajutorul unor raționamente asemănătoare, se pot deduce formulele corespunzătoare de derivarea unor alte funcții elementare, după cum urmează.

1.3 Funcția radical

Fie $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$\begin{aligned} (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x \neq 0, \text{ dacă } n \text{ este impar,} \\ (\sqrt[n]{x})' &= \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}, \quad x > 0, \text{ dacă } n \text{ este par.} \end{aligned}$$

Caz particular

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

1.4 Funcția exponențială cu bază e

$$(e^x)' = e^x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.5 Funcția exponențială cu bază oarecare

Fie $a > 0, a \neq 1$. Atunci

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.6 Funcția sinus

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.7 Funcția cosinus

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.8 Funcția logaritmică cu bază e

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

1.9 Funcția tangentă

Fie $f : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \operatorname{tg} x$. Atunci

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\sin x)(\cos x)'}{(\cos x)^2} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

deci

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

1.10 Funcția cotangentă

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

1.11 Funcția arcsinus

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

1.12 Funcția arccosinus

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

1.13 Funcția arctangentă

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.14 Funcția arccotangentă

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2 Operații cu funcții derivabile

Se poate observa că operațiile uzuale cu funcții derivabile au ca rezultat funcții derivabile, în măsura în care ele sunt bine definite, fapt observat în teorema de mai jos.

Teorema 2.1. Fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in D \cap D'$, f, g derivabile în x_0 . Atunci

1. $f + g, f - g$ sunt derivabile în x_0 , iar

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(derivata sumei este egală cu suma derivatelor), respectiv

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$$

(derivata diferenței este egală cu diferența derivatelor).

2. cf este derivabilă în x_0 pentru orice $c \in \mathbb{R}$, iar

$$(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$$

(constanta cu care se înmulțește trece înaintea derivatei).

3. fg este derivabilă în x_0 , iar

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4. $\frac{f}{g}$ este derivabilă în x_0 dacă $g(x_0) \neq 0$, iar

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

Pe scurt,

$$(f + g)' = f' + g', \quad (f - g)' = f' - g'$$

$$(cf)' = c(f)',$$

$$(fg)' = f'g + fg', \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Se poate de asemenea demonstra prin inducție matematică faptul că proprietățile 1 și 3 din Teorema 2.2 rămân valabile și pentru mai mult de două funcții. În speță, are loc următorul rezultat.

Teorema 2.2. Fie $f_1, f_2, \dots, f_n : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in D' \cap D$ astfel încât $f_1, f_2, \dots, f_n$ sunt derivabile în x_0 . Atunci

1. Funcția sumă $f_1 + f_2 + \dots + f_n$ este derivabilă în x_0 și

$$(f_1 + f_2 + \dots + f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) + f_2'(x_0) + \dots + f_n'(x_0).$$

2. Funcția produs $f_1 f_2 \dots f_n$ este derivabilă în x_0 și

$$(f_1 f_2 \dots f_n)'(x_0) = f_1'(x_0) f_2(x_0) \dots f_n(x_0) + f_1(x_0) f_2'(x_0) \dots f_n(x_0) + \dots + f_1(x_0) f_2(x_0) \dots f_n'(x_0).$$

3 Derivata funcției compuse

Teorema 3.1. Fie I_1, I_2 două intervale din $\mathbb{R}$, $u : I_1 \rightarrow I_2$, $f : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$ astfel încât u este derivabilă în x_0 , iar f este derivabilă în $u(x_0)$. Atunci $f \circ u$ este derivabilă în x_0 , iar

$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0)$$

Egalitatea menționată în enunțul teoremei de mai sus se mai poate pune și sub forma prescurtată

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u',$$

fiind deosebit de utilă pentru calculul derivatelor unor funcții care, fără a fi elementare, se pot obține prin compunerea unor funcții elementare. În aceste situații, u se definește adesea cu ajutorul **tuturor** termenilor dintr-o paranteză, de la exponent, de sub radical, de la numitor, ș.a.m.d.. După această înlocuire se identifică apoi f , ținând cont că funcția de plecare se scrie ca $f(u)$.

Exemple. 1. $[\sin(x^2 + x + 2)]'$.

Putem defini $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + x + 2$ (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sin u$. Atunci

$$\begin{aligned} [\sin(x^2 + x + 2)]' &= \sin'(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

Echivalent,

$$\begin{aligned} [\sin(x^2 + x + 2)]' &= (\sin u)' = \cos u \cdot u' = \cos(x^2 + x + 2) \cdot (x^2 + x + 2)' \\ &= \cos(x^2 + x + 2) \cdot (2x + 1). \end{aligned}$$

2. $[(3x + 2)^5]'$

Putem defini $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = 3x + 2$ (folosim toți termenii din paranteză), iar în acest caz f este dată de $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^5$, deoarece după înlocuire $f(u) = u^5$. Atunci

$$[(3x + 2)^5]' = (u^5)' = 5u^4 \cdot u' = 5(3x + 2)^4(3x + 2)' = 15(3x + 2)^4.$$

3. $(\sqrt{x^2 + 1})'$

Putem defini $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u(x) = x^2 + 1$ (folosim toți termenii de sub radical), iar în acest caz f este dată de $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$, deoarece după înlocuire $f(u) = \sqrt{u}$. Atunci

$$[\sqrt{x^2 + 1}]' = (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}(x^2 + 1)' = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

3.1 $(f^g)'$

Formula de derivare a funcției compuse se poate aplica cu succes și pentru derivarea funcțiilor exponențiale în care atât baza cât și exponentul conțin variabila. În acest sens, fie I un interval și fie $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, unde $f(x) > 0$ pentru orice $x \in D$. Putem defini atunci funcția $f^g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $f^g(x) = (f(x))^{g(x)}$.

Deoarece $f(x)^{g(x)} > 0$ pentru orice $x \in D$, au loc relațiile

$$f^g = e^{\ln(f^g)} = e^{g \ln f},$$

de unde, ținând seama că $(e^u)' = e^u \cdot u'$, obținem că

$$\begin{aligned} (f^g)' &= (e^{g \ln f})' = e^{g \ln f} \cdot (g \ln f)' = e^{g \ln f} (g' \ln f + g (\ln f)') \\ &= f^g \left(g' \ln f + g \frac{f'}{f} \right), \end{aligned}$$

formulă care se poate scrie și sub forma

$$(f^g)' = f^g \ln f \cdot g' + g f^{g-1} \cdot f'.$$

Se poate observa că $(f^g)'$ este suma a doi termeni, primul reprezentând valoarea derivatei atunci când f este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecință o funcție exponențială), iar al doilea reprezentând valoarea derivatei atunci când g este privită ca o constantă (iar f^g reprezintă în consecință o funcție putere).

4 Alte noțiuni legate de derivabilitate

4.1 Funcții derivabile pe o mulțime

Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă f este derivabilă în fiecare punct al unei mulțimi $A \subseteq D$, spunem că f **este derivabilă pe** A . Dacă f este derivabilă în orice punct al domeniului său de definiție, atunci se spune simplu că f **este derivabilă**.

4.2 Legătura între derivabilitate și continuitate

Se poate demonstra că o funcție derivabilă într-un punct este neapărat continuă în acel punct.

Teorema 4.1. Fie $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $a \in D \cap D'$ astfel încât f este derivabilă în a . Atunci f este continuă în a .

5 Diferențiala unei funcții într-un punct

Fiind dată o funcție $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă în $x_0 \in I$, vom numi **diferențială a funcției f în x_0** funcția liniară $df(x_0)$ definită prin

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Urmează atunci că

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx df(x_0)(h), \quad \text{pentru } h \approx 0,$$

în loc de $df(x_0)(h)$ folosindu-se și notația $df(x_0; h)$.

Pentru funcția identică $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x$, urmează că

$$dx(x_0)(h) = h, \quad \text{pentru orice } x_0 \in \mathbb{R},$$

iar întrucât $dx(x_0)$ este independent de x_0 , se va folosi în cele ce urmează notația simplificată dx . Cu notațiile de mai sus,

$$df(x_0)(h) = f'(x_0)dx(h), \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R},$$

de unde obținem următoarea egalitate de funcții liniare

$$df(x_0) = f'(x_0)dx,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei unei funcții într-un punct

$$f'(x_0) = \frac{df(x_0)}{dx}.$$

Pentru un punct arbitrar x , obținem deci

$$df(x) = f'(x)dx, \quad \text{respectiv} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}. \quad (1)$$

5.1 Operații cu funcții diferențiabile

Datorită relației (1), regulile de calcul ale derivatelor unor funcții se transmit și la diferențiale. Aceste reguli de calcul se mai pot scrie și sub următoarele forme prescurtate, prin omiterea punctului curent

$$d(f + g) = df + dg, \quad d(f - g) = df - dg, \quad d(cf) = cdf,$$

$$d(fg) = df \cdot g + f \cdot dg, \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{df \cdot g - f \cdot dg}{g^2}.$$

Exemple. 1. $d(\sin x) = (\sin x)'dx = \cos x dx$.

2. $d(\cos^3 x) = (\cos^3 x)'dx = 3 \cos^2 x (\cos x)'dx = -3 \cos^2 x \sin x dx$

3. $d(x^2 e^x) = (x^2 e^x)'dx = (2x e^x + x^2 e^x)dx$.

4. $d(x^2 e^x) = d(x^2) \cdot e^x + x^2 \cdot d(e^x) = 2x e^x dx + x^2 e^x dx = (2x + x^2) e^x dx$.

6 Derivate și diferențiale de ordin superior

6.1 Derivate de ordin superior

Fie I un interval și fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe o vecinătate a lui $x_0 \in I$. Dacă f' este la rândul său derivabilă în x_0 , vom spune că f este **de două ori derivabilă în x_0** iar derivata lui f' în x_0 se va numi **derivata a doua a lui f** sau **derivata de ordinul al doilea a lui f** , fiind notată $f''(x_0)$ sau $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. Conform definiției,

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Dacă f este de două ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numește **de două ori derivabilă pe I** .

În mod inductiv, dacă f este derivabilă de $n - 1$ ori pe o vecinătate a lui x_0 , iar derivata de ordinul $n - 1$ este la rândul său derivabilă în x_0 , vom spune că f este de n ori derivabilă în x_0 . Derivata de ordinul n a lui f în x_0 , notată prin $f^{(n)}(x_0)$ sau $\frac{d^n f(x_0)}{dx^n}$, este definită ca derivată a derivatei de ordinul $n - 1$, în sensul că

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0}.$$

Similar, dacă f este de n ori derivabilă în orice $x \in I$, atunci f se numește **de n ori derivabilă pe I** .

Exemplu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x^2+3x}$. Atunci

$$f'(x) = (2x + 3)e^{x^2+3x},$$

$$f''(x) = \left((2x + 3)e^{x^2+3x} \right)' = (4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x}$$

$$f'''(x) = \left((4x^2 + 12x + 11)e^{x^2+3x} \right)' = (8x^3 + 36x^2 + 66x + 45)e^{x^2+3x}.$$

6.1.1 Funcții de clasă C^k .

Vom nota

$$C^n(I) = \left\{ f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ de } n \text{ ori derivabilă pe } I, f^{(n)} \text{ continuă pe } I \right\}$$

$$C^\infty(I) = \{ f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ derivabilă de orice ordin pe } I \}.$$

Dacă $f \in C^n(I)$ (respectiv $f \in C^\infty(I)$), atunci f se va numi **de clasă C^n pe I** (respectiv **de clasă C^∞ pe I , sau indefinit derivabilă pe I**).

- Exemple.** 1. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c, b, c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^*$ (funcția polinomială de gradul al doilea) este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = 2ax + b, f''(x) = 2a, f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m \geq 3$.
2. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_i \in \mathbb{R}, 0 \leq i \leq n-1, a_n \in \mathbb{R}^*$ (funcția polinomială de gradul n) este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f^{(n)}(x) = n!a_n, f^{(m)}(x) = 0$ pentru $m > n$.
3. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = e^x, f''(x) = e^x$, putându-se demonstra prin inducție că $f^{(n)}(x) = e^x$ pentru $x \in \mathbb{R}$ și $n \geq 1$.
4. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \sin^{(4k)}(x) &= \sin x, & \sin^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ \sin^{(4k+2)}(x) &= -\sin x, & \sin^{(4k+3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ și $k \geq 0$.

5. Funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}), f''(x) = -\cos x = \cos(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \cos^{(4k)}(x) &= \cos x, & \cos^{(4k+1)}(x) &= -\sin x \\ \cos^{(4k+2)}(x) &= -\cos x, & \cos^{(4k+3)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ și $k \geq 0$.

6. Funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-a\}, f(x) = \frac{1}{x+a}$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, iar $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}, f''(x) = \frac{2}{(x+a)^3}$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\} \text{ și } n \geq 1.$$

6.2 Formula lui Leibniz

Fiind date $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I , are loc următoarea formulă pentru derivata de ordinul n a produsului fg al acestora.

Teorema 6.1. Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I , $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci fg este de clasă C^n pe I , iar

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \dots + C_n^n f g^{(n)}.$$

Formula de calcul a derivatei de ordinul n a unui produs demonstrată mai sus poartă numele de **formula lui Leibniz**. Remarcăm asemănarea între această formulă și formula binomială

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

În aplicații, formula se utilizează în special pentru funcții produs în care unul dintre factori este o funcție polinomială (și deci pentru care derivatele de la un anumit ordin încolo sunt nule, micșorând numărul termenilor nenuli din sumă), iar celălalt factor are derivatele de ordin superior ușor de determinat.

Exercițiu. Determinați $(x^2 e^{2x})^{(50)}$.

Soluție. Considerând $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{2x}$, observăm că $f^{(k)}(x) = 0$ pentru orice $k \geq 3$, iar $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ pentru orice $k \geq 0$. Atunci

$$\begin{aligned} (x^2 e^{2x})^{(50)} &= C_{50}^{48} (x^2)'' (e^{2x})^{(48)} + C_{50}^{49} (x^2)' (e^{2x})^{(49)} + C_{50}^{50} x^2 (e^{2x})^{(50)} \\ &= C_{50}^{48} 2 \cdot 2^{48} e^{2x} + C_{50}^{49} 2x \cdot 2^{49} e^{2x} + C_{50}^{50} x^2 \cdot 2^{50} e^{2x} \\ &= 2^{49} e^{2x} (1225 + 100x + 2x^2). \end{aligned}$$

6.3 Diferențiale de ordin superior

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$. Vom spune că f este **de două ori diferențiabilă în x_0** dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 , iar f' este diferențiabilă în x_0 . În aceste condiții, vom numi **diferențiala de ordinul al doilea a funcției f în x_0** , notată $d^2 f(x_0)$, funcția de gradul al doilea definită prin

$$d^2 f(x_0)(h) = f''(x_0)h^2, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul al doilea

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)dx^2,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul al doilea a unei funcții într-un punct

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Aici, prin dx^2 se va înțelege $dx \cdot dx$. Inductiv, vom spune că f este **de n ori diferențiabilă în x_0** dacă f este derivabilă de $n - 1$ ori într-o vecinătate a lui x_0 , iar $f^{(n-1)}$ este

diferențiabilă în x_0 . În aceste condiții, vom numi **diferențiala de ordinul n a funcției f în x_0** , notată $d^n f(x_0)$, funcția de gradul n definită prin

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul n

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)dx^n,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul n a unei funcții într-un punct

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$$

Pentru un punct arbitrar x , obținem deci

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)dx^n, \quad \text{respectiv} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Exemple. 1. $d^n(e^{ax}) = (e^{ax})^{(n)}dx^n = a^n e^{ax}dx^n$, pentru $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

2. $d^n(\ln(ax+b)) = (\ln(ax+b))^{(n)}dx^n = \frac{(-1)^{n-1}a^n(n-1)!}{(ax+b)^n}dx^n$, pentru $a, b \in \mathbb{R}$,
 $x \in \mathbb{R}, ax+b > 0$.

AM1, Curs 11

Funcții derivabile. Funcții diferențiabile (continuare)

1 Derivate și diferențiale de ordin superior

1.1 Derivate de ordinul n . Exemple (continuare)

Exemple. 1. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\sin^{(n)}(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \sin^{(4k)}(x) &= \sin x, & \sin^{(4k+1)}(x) &= \cos x \\ \sin^{(4k+2)}(x) &= -\sin x, & \sin^{(4k+3)}(x) &= -\cos x \end{aligned}$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ și $k \geq 0$.

2. Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R}$, iar $f'(x) = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2})$, $f''(x) = -\cos x = \cos(x + \frac{2\pi}{2})$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2}), \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \text{ și } n \geq 1.$$

Altfel, se poate observa că

$$\begin{aligned} \cos^{(4k)}(x) &= \cos x, & \cos^{(4k+1)}(x) &= -\sin x \\ \cos^{(4k+2)}(x) &= -\cos x, & \cos^{(4k+3)}(x) &= \sin x \end{aligned}$$

pentru $x \in \mathbb{R}$ și $k \geq 0$.

3. Funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-a\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+a}$ este indefinit derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-a\}$, iar $f'(x) = -\frac{1}{(x+a)^2}$, $f''(x) = \frac{2}{(x+a)^3}$, putându-se demonstra prin inducție că

$$\left(\frac{1}{x+a} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x+a)^{n+1}} \quad \text{pentru } x \in \mathbb{R} \setminus \{-a\} \text{ și } n \geq 1.$$

1.2 Formula lui Leibniz

Fiind date $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I , are loc următoarea formulă pentru derivata de ordinul n a produsului fg al acestora.

Teorema 1.1. Fie $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ de clasă C^n pe I , $n \in \mathbb{N}^*$. Atunci fg este de clasă C^n pe I , iar

$$(fg)^{(n)} = C_n^0 f^{(n)} g + C_n^1 f^{(n-1)} g' + C_n^2 f^{(n-2)} g'' + \dots + C_n^n f g^{(n)}.$$

Formula de calcul a derivatei de ordinul n a unui produs demonstrată mai sus poartă numele de **formula lui Leibniz**. Remarcăm asemănarea între această formulă și formula binomială

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n b^n.$$

În aplicații, formula se utilizează în special pentru funcții produs în care unul dintre factori este o funcție polinomială (și deci pentru care derivatele de la un anumit ordin încolo sunt nule, micșorând numărul termenilor nenuli din sumă), iar celălalt factor are derivatele de ordin superior ușor de determinat.

Exercițiu. Determinați $(x^2 e^{2x})^{(50)}$.

Soluție. Considerând $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $g(x) = e^{2x}$, observăm că $f^{(k)}(x) = 0$ pentru orice $k \geq 3$, iar $g^{(k)}(x) = 2^k e^{2x}$ pentru orice $k \geq 0$. Atunci din suma aflată în membrul drept doar ultimii 3 termeni sunt nenuli, iar

$$\begin{aligned} (x^2 e^{2x})^{(50)} &= C_{50}^{48} (x^2)'' (e^{2x})^{(48)} + C_{50}^{49} (x^2)' (e^{2x})^{(49)} + C_{50}^{50} x^2 (e^{2x})^{(50)} \\ &= C_{50}^{48} 2 \cdot 2^{48} e^{2x} + C_{50}^{49} 2x \cdot 2^{49} e^{2x} + C_{50}^{50} x^2 \cdot 2^{50} e^{2x} \\ &= 2^{49} e^{2x} (1225 + 100x + 2x^2). \end{aligned}$$

1.3 Diferențiale de ordin superior

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$. Vom spune că f este **de două ori diferențiabilă în x_0** dacă f este derivabilă într-o vecinătate a lui x_0 , iar f' este diferențiabilă în x_0 . În aceste condiții, vom numi **diferențiala de ordinul al doilea a funcției f în x_0** , notată $d^2 f(x_0)$, funcția de gradul al doilea definită prin

$$d^2 f(x_0)(h) = f''(x_0)h^2, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul al doilea

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)dx^2,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul al doilea a unei funcții într-un punct

$$f''(x_0) = \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}.$$

Aici, prin dx^2 se va înțelege $dx \cdot dx$. Inductiv, vom spune că f este **de n ori diferențiabilă în x_0** dacă f este derivabilă de $n - 1$ ori într-o vecinătate a lui x_0 , iar $f^{(n-1)}$ este diferențiabilă în x_0 . În aceste condiții, vom numi **diferențiala de ordinul n a funcției f în x_0** , notată $d^n f(x_0)$, funcția de gradul n definită prin

$$d^n f(x_0)(h) = f^{(n)}(x_0)h^n, \quad \text{pentru } h \in \mathbb{R}.$$

Obținem atunci următoarea egalitate de funcții de gradul n

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0) dx^n,$$

care conduce la următoarea notație diferențială alternativă a derivatei de ordinul n a unei funcții într-un punct

$$f^{(n)}(x_0) = \frac{d^n f(x_0)}{dx^n}.$$

Pentru un punct arbitrar x , obținem deci

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n, \quad \text{respectiv} \quad f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Exemple. 1. $d^n(e^{ax}) = (e^{ax})^{(n)} dx^n = a^n e^{ax} dx^n$, pentru $x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$.

2. $d^n(\ln(ax+b)) = (\ln(ax+b))^{(n)} dx^n = \frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n} dx^n$, pentru $a, b \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, ax+b > 0$.

2 Teoremele fundamentale ale calculului diferențial

În această secțiune vom prezenta câteva proprietăți importante ale funcțiilor derivabile și unele aplicații ale acestora în studiul monotoniei și aproximării funcțiilor. Începem prin a defini noțiunea de punct de extrem.

2.1 Puncte de extrem

2.1.1 Puncte de minim local. Valori minime locale

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval. Vom spune că $x_0 \in I$ este un **punct de minim local** dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mică valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui x_0 . În aceste condiții $f(x_0)$ se numește **valoare minimă locală**.

2.1.2 Puncte de maxim local. Valori maxime locale

Similar, vom spune că $x_0 \in I$ este un **punct de maxim local** dacă există o vecinătate $V \in \mathcal{V}(x_0)$ astfel ca $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in V \cap I$, adică valoarea $f(x_0)$ a lui f în x_0 este cea mai mare valoare a acestei funcții pe o vecinătate a lui x_0 . În aceste condiții $f(x_0)$ se numește **valoare maximă locală**.

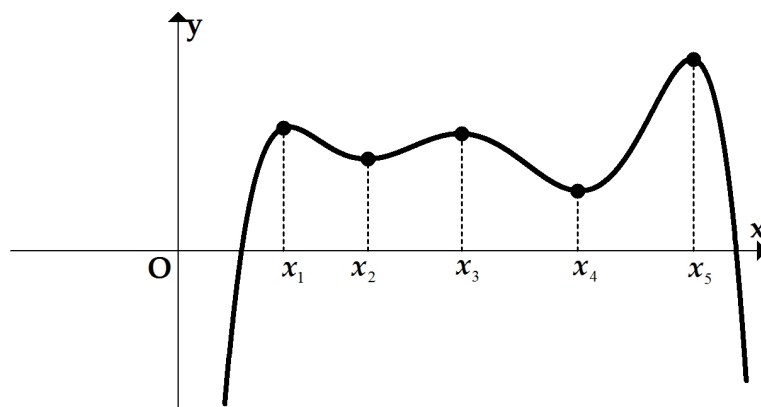


Figure 1: x_2, x_4 puncte de minim local, x_1, x_3, x_5 puncte de maxim local

2.1.3 Puncte de extrem local. Valori extreme locale

Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim local al funcției f , se spune atunci că x_0 este un **punct de extrem local** al funcției f , valorile funcției f în punctele de extrem local numindu-se **valori extreme locale** ale funcției f . De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) local al funcției f , punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcției f se numește **punct de minim (maxim) local al graficului**.

2.1.4 Puncte de extrem global. Valori extreme globale

Dacă x_0 este în așa fel încât $f(x_0) \leq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este **punct de minim global** al lui f , iar dacă $f(x_0) \geq f(x)$ pentru orice $x \in I$, vom spune că x_0 este **punct de maxim global** al lui f . Dacă x_0 este un punct de minim sau maxim global al funcției f , se spune atunci că x_0 este un **punct de extrem global** al funcției f , valorile funcției f în punctele de extrem local numindu-se **valori extreme globale** ale funcției f . De asemenea, dacă x_0 este un punct de minim (maxim) global al funcției f , punctul corespunzător $(x_0, f(x_0))$ de pe graficul funcției f se numește **punct de minim (maxim) global al graficului**.

Se observă că orice punct de extrem global este și punct de extrem local, nu însă și reciproc. De exemplu 2 este punct de minim local al funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x - 1)(x - 2)^2$, deoarece $f(2) = 0$, iar pe o vecinătate suficient de mică a sa f ia doar valori pozitive, dar nu este punct de minim global, deoarece f ia și valori negative (de exemplu, $f(0) = -4$).

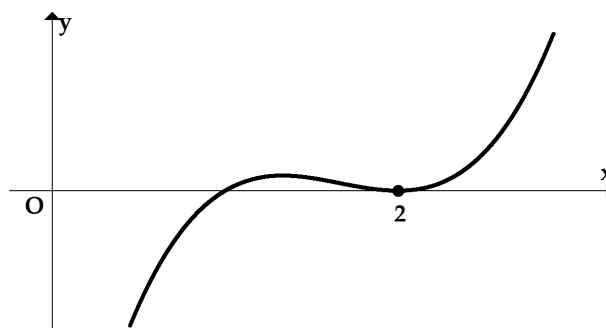


Figure 2: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)(x-2)^2$

Se poate observa că o funcție f poate admite mai multe puncte de minim sau maxim local, putând exista deasemenea valori minime locale mai mari decât valori maxime locale.

- Exemple.** 1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ are 0 ca punct de minim global, deoarece $f(0) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. În concluzie, 0 este și punct de minim local. Se observă de asemenea că $f'(0) = 0$.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)^2$ are 1 ca punct de maxim local, deoarece $f(1) = 0$, iar $f(x) \leq 0$ pentru x apropiat de 1 și pe 3 ca punct de minim local, deoarece $f(3) = 0$, iar $f(x) \geq 0$ pentru x apropiat de 3. Totuși, acestea nu sunt puncte de extrem global, deoarece f ia atât valori strict negative (de exemplu $f(0) = -18$), cât și valori strict pozitive (de exemplu $f(4) = 18$).

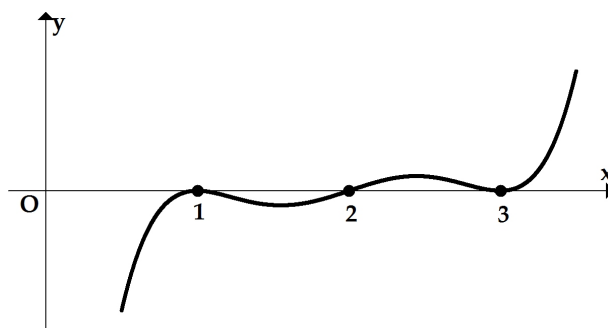


Figure 3: Graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)^2$

2.2 Teorema lui Fermat

Vom preciza în cele ce urmează un principiu de localizare a punctelor de extrem ale unei funcții date, cunoscut sub numele de **teorema lui Fermat**

Teorema 2.1. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, și fie x_0 un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă. Atunci $f'(x_0) = 0$.

Se poate observa că dacă x_0 este un punct de extrem care nu este interior intervalului I , atunci $f'(x_0)$ poate să nu fie 0. În acest sens, fie $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x$. Atunci

0 și 1 sunt puncte de minim global, respectiv de maxim global, deoarece f este strict crescătoare pe $[0, 1]$, deci sunt și puncte de extrem local. Totuși, $f'(x) = 1 \neq 0$ pentru orice $x \in [0, 1]$.

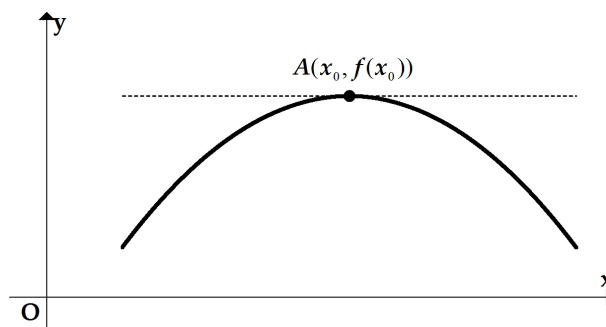
De asemenea, reciproca teoremei lui Fermat nu este adevărată, în sensul că dacă $f'(x_0) = 0$, atunci x_0 nu este neapărat punct de extrem, chiar dacă este interior intervalului I . În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Atunci f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) = 3x^2$, pentru $x \in \mathbb{R}$, deci $f'(0) = 0$. Totuși, 0 nu este punct de extrem, deoarece $f(0) = 0$, iar f ia în orice vecinătate a lui 0 atât valori strict negative (pentru $x < 0$), cât și valori strict pozitive (pentru $x > 0$).

În fine, să observăm și că o funcție poate avea puncte de extrem în care nu este derivabilă. În acest sens, fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$. Atunci $0 = f(0) \leq f(x)$ pentru $x \in \mathbb{R}$, deci 0 este punct de minim global, dar $f'_s(0) = -1 \neq f'_d(0) = 1$, deci f nu este derivabilă în 0.

Să remarcăm următoarea **interpretare geometrică** a teoremei lui Fermat.

2.2.1 Interpretarea geometrică a teoremei lui Fermat

Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 este un punct de extrem interior lui I în care f este derivabilă, atunci tangenta la grafic în punctul de extrem corespunzător $A(x_0, f(x_0))$ al graficului, de pantă $f'(x_0) = 0$, este paralelă cu Ox .



2.2.2 Puncte critice

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că x_0 este un **punct critic** al lui f dacă f este derivabilă în x_0 , iar $f'(x_0) = 0$.

Altfel spus, punctele critice ale lui f sunt rădăcinile lui f' . Cu această precizare, teorema lui Fermat arată că punctele de extrem ale unei funcții situate în interiorul domeniului de definiție și în care acea funcție este derivabilă se găsesc printre punctele critice. Totuși, s-a observat anterior că nu orice punct critic este punct de extrem.

2.3 Teorema lui Lagrange

2.3.1 Funcție Rolle pe un interval

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Vom spune că f este **funcție Rolle** pe $[a, b]$ dacă f este continuă pe $[a, b]$ și derivabilă pe (a, b) .

Are loc următorul rezultat, numit **teorema lui Lagrange** sau **teorema creșterilor finite**.

Teorema 2.2. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f funcție Rolle pe $[a, b]$. Atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Teorema lui Lagrange are consecințe importante în studiul monotoniei funcțiilor, enunțate în următorul rezultat.

Corolar 2.1. 1. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I , iar derivata sa este identic nulă pe I , atunci f este constantă pe I .

2. Dacă $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, sunt derivabile pe I , iar derivatele lor sunt egale pe I , atunci f și g diferă printr-o constantă pe I .

3. Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I , iar derivata sa este pozitivă (respectiv strict pozitivă) pe I , atunci f este crescătoare (respectiv strict crescătoare) pe I . Dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval, este derivabilă pe I , iar derivata sa este negativă (respectiv strict negativă) pe I , atunci f este descrescătoare (respectiv strict descrescătoare) pe I .

2.4 Regulile lui L'Hôpital

În unele dintre situațiile în care calculul limitelor unor funcții conduce la cazuri de nedeterminare de tipul $\frac{0}{0}$ sau $\frac{\infty}{\infty}$, pot fi utilizate cu succes așa-numitele **reguli ale lui L'Hôpital**.

2.4.1 Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{0}{0}$

Teorema 2.3. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I și fie f, g două funcții definite pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.
2. f, g sunt derivabile pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 .
3. $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I, x \neq x_0$.
4. Există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.

Atunci $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I, x \neq x_0$, funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$. În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x - \operatorname{arctg} x, \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^3,$$

sunt în așa fel încât $\lim_{x \rightarrow 0} (x - \operatorname{arctg} x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, f, g sunt derivabile pe $\mathbb{R}$ iar $g'(x) = 3x^2 \neq 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^*$. În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3},$$

de unde obținem că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \frac{1}{3}$.

Uneori, este necesar să se aplice de mai multe ori succesiv regula lui L'Hôpital, întrucât noua limită $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ este tot de tip $\frac{0}{0}$.

Exemplu. Să determinăm valoarea limitei $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$. În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x - e^{-x} - 2x, \quad g : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x - \sin x,$$

sunt în așa fel încât $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - e^{-x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - \sin x) = 0$, f, g sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g'(x) = 1 - \cos x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - e^{-x} - 2x)'}{(x - \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x}.$$

Funcțiile

$$f_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = e^x + e^{-x} - 2, \quad g_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g_1(x) = 1 - \cos x$$

sunt în așa fel încât $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + e^{-x} - 2) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) = 0$, f_1, g_1 sunt derivabile pe $(-\varepsilon, \varepsilon)$ iar $g_1'(x) = \sin x \neq 0$ pentru orice $x \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$. În plus,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x + e^{-x} - 2)'}{(1 - \cos x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} \cdot 2x}{\frac{\sin x}{x} \cdot x} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Urmează că

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = 2.$$

2.4.2 Regula lui L'Hôpital pentru cazul de nedeterminare $\frac{\infty}{\infty}$

Teorema 2.4. Fie x_0 un punct de acumulare (finit sau infinit) al unui interval I și fie f, g două funcții definite pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 . Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} |g(x)| = \infty$.
2. f, g sunt derivabile pe I , cu excepția eventuală a lui x_0 .
3. $g'(x) \neq 0$ pentru orice $x \in I, x \neq x_0$.
4. Există limita $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, finită sau infinită.

Atunci funcția $\frac{f}{g}$ are limită în x_0 și

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplu. Să calculăm limita $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))}$, $a, b \in (0, \infty)$. În acest scop, să observăm că funcțiile

$$f : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln(\sin(ax)), \quad g : (0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \ln(\sin(bx))$$

sunt în așa fel încât $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(\sin(bx)) = -\infty$, f, g sunt derivabile pe $(0, \varepsilon)$ iar $g'(x) = \frac{b \cos bx}{\sin bx} \neq 0$ pentru orice $x \in (0, \varepsilon)$. În plus,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{(\ln(\sin(ax)))'}{(\ln(\sin(bx)))'} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{a \cos ax}{b \cos bx} \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\frac{\sin bx}{bx} \cdot bx}{\frac{\sin ax}{ax} \cdot ax} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1. \end{aligned}$$

Urmează că

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(\sin(ax))}{\ln(\sin(bx))} = 1.$$

2.4.3 Alte cazuri de nedeterminare

Regulile lui L'Hôpital sunt destinate în mod explicit calculului limitelor unor rapoarte de funcții ce conduc la cazurile de nedeterminare $\frac{0}{0}$ și $\frac{\infty}{\infty}$. Totuși, după rearanjarea unor

termeni sau executarea unor operații de logaritmare, și alte cazuri de nedeterminare pot fi tratate prin intermediul acestor reguli.

2.5 Formula lui Taylor

Conform definiției diferențiabilității, a fost observat anterior că dacă $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă în $x_0 \in I$, atunci

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \quad \text{pentru } x \approx x_0.$$

2.5.1 Polinomul lui Taylor de ordinul n

În cele ce urmează, dorim să extindem această formulă de aproximare la una cu acuratețe superioară. Să presupunem că $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este derivabilă de ordinul n în $x_0 \in I$, $n \geq 1$. Atunci derivatele de ordin până la $n - 1$ inclusiv există pe o vecinătate a lui x_0 ; pentru simplitatea expunerii, să presupunem că acestea există pe întreg I . Funcția polinomială $T_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

se numește **polinomul lui Taylor de grad n** atașat funcției f în punctul x_0 .

2.5.2 Restul formulei lui Taylor de ordinul n

Fie acum $R_n : I \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I.$$

Atunci

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x), \quad \text{pentru orice } x \in I,$$

sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x),$$

relație numită **formula lui Taylor de ordinul n** corespunzătoare funcției f în punctul x_0 . Funcția R_n astfel definită poartă numele de **restul formulei lui Taylor de ordinul n** și măsoară eroarea cu care polinomul T_n aproximează funcția f .

Dacă f este derivabilă de $n + 1$ ori pe întreg intervalul I , obținem **restul lui Lagrange**, sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

pentru c între x_0 și x . Există atunci $\theta \in (0, 1)$ (dependent de x_0 , x și n) astfel încât

$$c = x_0 + \theta(x - x_0),$$

iar cu notația $h = x - x_0$, formula lui Taylor se poate scrie astfel

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + R_n,$$

unde R_n se poate pune sub forma

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta h)}{(n+1)!}h^{n+1} \quad (\text{Lagrange}). \quad (1)$$

Exemple. 1. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = e^x, \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = 1$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, iar

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k)} = 0$, iar $f^{(2k+1)} = (-1)^k, k \in \mathbb{N}$. De aici,

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \sin\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad \theta \in (0, 1).$$

3. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \cos x$. Cum

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \text{pentru orice } n \in \mathbb{N},$$

avem că $f^{(n)}(0) = \cos \frac{n\pi}{2}$, deci $f^{(2k+1)} = 0$, iar $f^{(2k)} = (-1)^k, k \in \mathbb{N}$. De aici,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2n!} + R_n,$$

unde

$$R_n = \frac{(-1)^{n+1} \cos\left(\theta x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right)}{(2n+2)!} x^{2n+2}, \quad \theta \in (0, 1).$$

2.6 Puncte de extrem ale unei funcții. Condiții necesare și suficiente

Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval. S-a observat anterior că punctele de extrem care sunt interioare lui I și în care f este derivabilă se găsesc printre punctele critice ale funcției f , dar nu orice punct critic al unei funcții este neapărat punct de extrem. De exemplu, fie $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. Atunci $f'_1(x) = 3x^2$, deci $x = 0$ este punct critic al lui f_1 . Totuși, acesta nu este punct de extrem, deoarece $f_1(0) = 0$, iar în orice vecinătate a lui 0 funcția f ia atât valori negative cât și valori pozitive. În cele ce urmează, vom obține condiții de extrem cu ajutorul derivatelor de ordin superior.

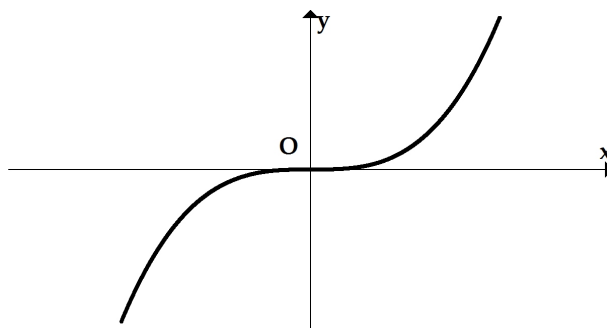


Figure 4: Graficul funcției $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^3$. $x = 0$ este punct critic, dar nu este punct de extrem

Teorema 2.5. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ și fie $x_0 \in I$ astfel încât

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

1. Dacă $n = 2k$, atunci x_0 este punct de extrem local.

(a) Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.

(b) Dacă $n = 2k$, iar $f^{(n)}(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local.

2. Dacă $n = 2k + 1$, iar x_0 este punct interior lui I , atunci x_0 nu este punct de extrem local.

Pentru $n = 2$, se obține următorul corolar foarte util în studiul variației funcțiilor.

Corolar 2.2. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă de două ori în $x_0 \in I$ astfel încât $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) \neq 0$.

1. Dacă $f''(x_0) > 0$, atunci x_0 este punct de minim local.

2. Dacă $f''(x_0) < 0$, atunci x_0 este punct de maxim local.

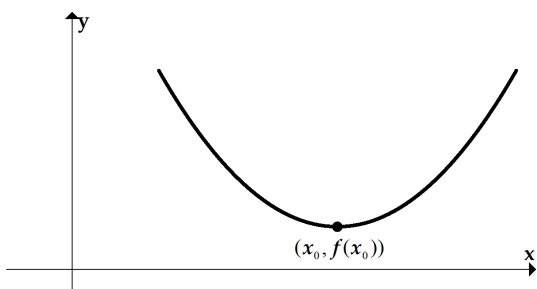


Figure 5: $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) > 0$. x_0 este punct de minim local

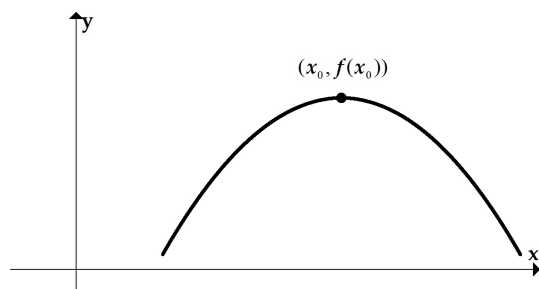


Figure 6: $f'(x_0) = 0$ și $f''(x_0) < 0$. x_0 este punct de maxim local

Exercițiu. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x$. Determinați punctele de extrem ale lui f .

Soluție. Cum f este derivabilă pe întreg $\mathbb{R}$, iar toate punctele domeniului sunt puncte interioare acestuia, urmează conform teoremei lui Fermat că punctele de extrem sunt printre punctele critice. Deoarece $f'(x) = 3x^2 - 3$, f' se anulează pentru $x_1 = -1$ și $x_2 = 1$. Cum $f''(x) = 6x$, urmează că $f''(-1) = -6 < 0$, iar $f''(1) = 6 > 0$, deci -1 este un punct de maxim local, iar 1 este un punct de minim local.