

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

AM 1 - RESTANȚĂ

(10p) 1. Să se calculeze: **a)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 1}{5 - n + 2n^2 - 4n^4}$; **b)** $\lim_{x \searrow 5} \frac{10 - 3x}{5 - x}$.

(10p) 2. Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n}$.

(10p) 3. Să se calculeze: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{12x^2}$.

(10p) 4. Să se studieze natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^4 + 7n + 4}{7n^4 + 4n + 1} \right)^{47n}$.

(10p) 5. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcției $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t) = \left(5t^4 + 3t + \cos t, \frac{4t + 2}{3t + 5}, t^2 \sin t, \ln(t^2 + 5^t + 1) \right), \forall t > 1.$$

(10p) 6. Să se determine gradientul funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 3z - 3x^3 y^2 z - \sin(36xy^2 z^3), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

7. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 12y^2 + z^2 + 9x + 36y - 10z + 1, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(10p) **a)** Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi și gradientul funcției f .

(10p) **b)** Calculați derivatele parțiale de ordinul al doilea și Hessiana funcției f .

(10p) **c)** Stabiliți dacă funcția f admite puncte de extrem.

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

ANALIZĂ MATEMATICĂ 1 - RESTANȚĂ

Recomandare

Pentru a obține mai ușor nota minimă de promovare, recomandăm parcurgerea subiectelor:

(10p) 1. Să se calculeze: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 1}{5 - n + 2n^2 - 4n^4}$; b) $\lim_{x \searrow 5} \frac{10 - 3x}{5 - x}$.

1. - de rezolvat integral

(10p) 2. Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n}$.

2. - de rezolvat integral

(10p) 5. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcției $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t) = \left(5t^4 + 3t + \cos t, \frac{4t + 2}{3t + 5}, t^2 \sin t, \ln(t^2 + 5^t + 1) \right), \forall t > 1.$$

5. - de rezolvat integral - (10p) - sau doar primele trei componente - (8p)

(10p) 6. Să se determine gradientul funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 3z - 3x^3 y^2 z - \sin(36xy^2 z^3), \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

6. - de rezolvat integral - (10p) - sau doar pentru $x^3 + y^4 + z^5 - x^2 y^3 z^4$ - (7p)

7. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 12y^2 + z^2 + 9x + 36y - 10z + 1, \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(10p) a) Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi și gradientul funcției f .

(10p) b) Calculați derivatele parțiale de ordinul al doilea și Hessiana funcției f .

(10p) c) Stabiliți dacă funcția f admite puncte de extrem.

7. - de rezolvat doar subpunctele a) și b)

În acest mod, puteți obține 10p[1]+10p[2]+8p[5]+7p[6]+20p[7]+10p[Oficiu] = 65p, adică nota 6,50 (media șapte)...

Nota 1: în cele ce urmează, puteți găsi soluțiile la toate problemele din model, nu doar la cele recomandate.

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

ANALIZĂ MATEMATICĂ - RESTANȚĂ

Model rezolvat

(10p) 1. Să se calculeze: **a)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 1}{5 - n + 2n^2 - 4n^4}$; **b)** $\lim_{x \searrow 5} \frac{10 - 3x}{5 - x}$.

Rezolvare: a) Vom folosi limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot (+\infty), & \text{dacă } n > m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n = m \\ 0, & \text{dacă } n < m. \end{cases}$$

Mai exact, această formulă ne spune că:

- dacă gradul polinomului de la numărător (cel care are coeficienții $a_n, a_{n-1}, \dots$) este mai mare decât cel al polinomului de la numitor (cel care are coeficienții $b_m, b_{m-1}, \dots$), adică dacă $n > m$, atunci rezultatul este $+\infty$ sau $-\infty$, în funcție de semnul fracției determinate de coeficienții dominanți, adică semnul fracției $\frac{a_n}{b_m}$;
- dacă cele două grade sunt egale, adică dacă $n = m$, atunci rezultatul este chiar fracția coeficienților dominanți, adică $\frac{a_n}{b_m}$;
- dacă gradul de la numărător este mai mic decât cel de la numitor, adică dacă $n < m$, atunci rezultatul este 0.

Prin urmare, limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 1}{5 - n + 2n^2 - 4n^4}$ poate fi rescrisă drept $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 1}{-4n^4 + 2n^2 - n + 5}$ și observăm astfel că $n = m = 4$ (adică ambele polinoame sunt de gradul 4), iar limita este $\frac{4}{-4} = -1$.

Pentru a primi punctajul maxim, vom parcurge pașii următori:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^4 + 3n^3 - 2n^2 + 1}{-4n^4 + 2n^2 - n + 5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 \left(4 + \frac{3n^3}{n^4} - \frac{2n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4} \right)}{n^4 \left(-4 + \frac{2n^2}{n^4} - \frac{n}{n^4} + \frac{5}{n^4} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{3}{n} - \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^4}}{-4 + \frac{2}{n^2} - \frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^4}} = \frac{4}{-4},$$

deoarece fracțiile $\frac{3}{n}, \frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^4}, \frac{2}{n^2}, \frac{1}{n^3}$ și $\frac{5}{n^4}$ converg la 0 pentru $n \rightarrow \infty$.

Alte exemple:

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 4n^4 + 5n^3 + 2}{-2n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(3 + \frac{4n^4}{n^5} + \frac{5n^3}{n^5} + \frac{2}{n^5} \right)}{n^4 \left(-2 + \frac{4n^3}{n^4} + \frac{5n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n^4} \cdot \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^5}}{-2 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^6 + 4n^5 + 5n^4 + 2}{2n^4 - 4n^5 - 5n^6 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \left(3 + \frac{4n^5}{n^6} + \frac{5n^4}{n^6} + \frac{2}{n^6} \right)}{n^6 \left(\frac{2n^4}{n^6} - \frac{4n^5}{n^6} - \frac{5n^6}{n^6} + \frac{1}{n^6} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^6}}{\frac{2}{n^2} - \frac{4}{n} - 5 + \frac{1}{n^6}} = -\frac{3}{5}.$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 4n^4 + 5n^3 + 2}{2n^4 - 4n^5 - 5n^6 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(3 + \frac{4n^4}{n^5} + \frac{5n^3}{n^5} + \frac{2}{n^5} \right)}{n^6 \left(\frac{2n^4}{n^6} - \frac{4n^5}{n^6} - 5 + \frac{1}{n^6} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n^6} \cdot \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^5}}{\frac{2}{n^2} - \frac{4}{n} - 5 + 1} \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) = 0 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) = 0.$$

b) $\lim_{x \searrow 5} \frac{10 - 3x}{5 - x}.$

Rezolvare: Dacă $x \searrow 5$, atunci putem să ne imaginăm că $x \approx 5.1$ sau $x \approx 5.0001$. Prin urmare, folosind $x \approx 5.1$, obținem $10 - 3x \approx 10 - 3 \cdot 5.1 \approx 10 - 3 \cdot 5 = 10 - 15 = -5 < 0$ și $5 - x \approx 5 - 5.1 = -0.1 < 0$. Prin urmare:

$$\lim_{x \searrow 5} \frac{10 - 3x}{5 - x} = \left[\frac{10 - 15}{0_-} \right] = \left[\frac{-5}{0_-} \right] = +\infty.$$

Alte exemple:

$$\bullet \lim_{x \nearrow 5} \frac{10 - 3x}{5 - x} = \left[\frac{10 - 15}{0_+} \right] = \left[\frac{-5}{0_+} \right] = -\infty,$$

unde am folosit $x \nearrow 5$ implică $x \approx 4.9$.

$$\bullet \lim_{x \nearrow 5} \frac{10 - 3x}{x - 5} = \left[\frac{10 - 15}{0_-} \right] = \left[\frac{-5}{0_-} \right] = +\infty,$$

unde am folosit $x \nearrow 5$ implică $x \approx 4.9$.

$$\bullet \lim_{x \searrow 5} \frac{10 - 3x}{x - 5} = \left[\frac{10 - 15}{0_+} \right] = \left[\frac{-5}{0_+} \right] = -\infty,$$

unde am folosit $x \searrow 5$ implică $x \approx 5.1$.

(10p) 2. Să se calculeze: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n}.$

Rezolvare: Vom utiliza limita fundamentală pentru cazul de nedeterminare 1^∞ :

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} (1 + x_n)^{1/x_n} = e.$$

În cazul nostru, avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2} \right)^{3n} = [1^\infty].$$

Suntem, așadar, în cazul de nedeterminare 1^∞ . Atunci:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} - 1 \right)^{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} - \frac{n^2 + 4n + 2}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(n^2 + 7n + 5) - (n^2 + 4n + 2)}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n^2 + 7n + 5 - n^2 - 4n - 2}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n + 3}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3n + 3}{n^2 + 4n + 2} \right)^{\frac{n^2 + 4n + 2}{3n + 3}} \right]^{\frac{3n + 3}{n^2 + 4n + 2} \cdot 3n}. \end{aligned}$$

Observăm acum că pentru $x_n = \frac{3n + 3}{n^2 + 4n + 2}$ avem formată limita fundamentală în rândul anterior, din moment ce $\frac{3n + 3}{n^2 + 4n + 2} \rightarrow 0$. Prin urmare:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 7n + 5}{n^2 + 4n + 2} \right)^{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(3n+3) \cdot 3n}{n^2+4n+2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{9n^2+9n}{n^2+4n+2}} = e^9.$$

Alt exemplu:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 + 5n + 4}{3n^2 + 2n + 3} \right)^{2n} &= [1^\infty] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n^2 + 5n + 4}{3n^2 + 2n + 3} - 1 \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n^2 + 5n + 4}{3n^2 + 2n + 3} - \frac{3n^2 + 2n + 3}{3n^2 + 2n + 3} \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(3n^2 + 5n + 4) - (3n^2 + 2n + 3)}{3n^2 + 2n + 3} \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n^2 + 5n + 4 - 3n^2 - 2n - 3}{3n^2 + 2n + 3} \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2n + 1}{3n^2 + 2n + 3} \right)^{2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{2n + 1}{3n^2 + 2n + 3} \right)^{\frac{3n^2 + 2n + 3}{2n + 1}} \right]^{\frac{2n + 1}{3n^2 + 2n + 3} \cdot 2n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{(2n+1) \cdot 2n}{3n^2+2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{4n^2+2n}{3n^2+2n+3}} = e^{\frac{4}{3}} = e^{4/3} = \sqrt[3]{e^4}. \end{aligned}$$

(10p) 3. Să se calculeze: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{12x^2}$.

Rezolvare: Avem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(6x)}{12x^2} &= \left[\frac{1 - \cos(0)}{12 \cdot 0^2} \right] = \left[\frac{1 - 1}{0} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(6x))'}{(12x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(-\sin(6x)) \cdot (6x)'}{12 \cdot 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \sin(6x)}{24x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(6x)}{6x} \cdot \frac{6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 \cdot \frac{6}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Am folosit aici limita fundamentală

$$\lim_{x_n \rightarrow 0} \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 1,$$

unde **este indicat să nu aplicăm L'Hospital...**

Alt exemplu:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - 3 \cos(4x)}{14x^2} &= \left[\frac{3 - 3 \cos(0)}{14 \cdot 0^2} \right] = \left[\frac{0}{0} \right] = \\ &\stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(3 - 3 \cos(4x))'}{(14x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3(-\sin(4x)) \cdot (4x)'}{14 \cdot 2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \sin(4x)}{28x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin(4x)}{7x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot \frac{\sin(4x)}{4x} \cdot \frac{4x}{7x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 3 \cdot 1 \cdot \frac{4}{7} = \frac{12}{7}. \end{aligned}$$

(10p) 4. Să se studieze natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^4 + 7n + 4}{7n^4 + 4n + 1} \right)^{47n}$.

Rezolvare: Vom folosi criteriul rădăcinii. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cu $a_n \geq 0$, pentru orice $n \geq 1$. Dacă există

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, atunci:

$$\bullet L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este convergentă; } \bullet L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este divergentă.}$$

Amintim aici și regula $\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n} = x^{\frac{m}{n}}$. În cazul nostru, avem:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{4n^4 + 7n + 4}{7n^4 + 4n + 1} \right)^{47n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^4 + 7n + 4}{7n^4 + 4n + 1} \right)^{47n/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^4 + 7n + 4}{7n^4 + 4n + 1} \right)^{47} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^4}{7n^4} \right)^{47} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{7} \right)^{47} = \left(\frac{4}{7} \right)^{47} < 1^{47} = 1. \end{aligned}$$

Prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^4 + 7n + 4}{7n^4 + 4n + 1} \right)^{47n}$ este convergentă.

Alt exemplu: pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6n^5 + 5n + 6}{4n^5 + 5n + 4} \right)^{25n}$, avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{6n^5 + 5n + 6}{4n^5 + 5n + 4} \right)^{25n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^5 + 5n + 6}{4n^5 + 5n + 4} \right)^{25n/n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^5 + 5n + 6}{4n^5 + 5n + 4} \right)^{25} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n^5}{4n^5} \right)^{25} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6}{4} \right)^{25} = \left(\frac{6}{4} \right)^{25} > 1^{25} = 1, \end{aligned}$$

de unde obținem că seria este divergentă.

(10p) 5. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcției $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t) = \left(5t^4 + 3t + \cos t, \frac{4t+2}{3t+5}, t^2 \sin t, \ln(t^2 + 5^t + 1) \right), \quad \forall t > 1.$$

Rezolvare: Amintim aici formulele $1' = 0$, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\sin(t))' = \cos(t)$, $(\cos(t))' = -\sin(t)$, $(\ln(t))' = \frac{1}{t}$, $(a^t)' = a^t \cdot \ln(a)$, $(\arcsin(t))' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ și $(\arctg(t))' = \frac{1}{1+t^2}$.

Mai mult decât atât, avem următoarele reguli de derivare pentru două funcții derivabile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, cu $g \neq 0$ pe D , și pentru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (\lambda f)' = \lambda \cdot f', \quad \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f \cdot g)' = f'g + fg' \quad \text{și} \quad (f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$

Cu alte cuvinte, avem:

$$\begin{aligned} (5t^4 + 3t + \cos t)' &= 5 \cdot (t^4)' + 3 \cdot (t)' + (\cos(t))' \\ &= 6 \cdot 4t^3 - 3 \cdot 1 + (-\sin(t)) = 24t^3 - 3 - \sin(t); \\ \left(\frac{4t+2}{3t+5} \right)' &= \frac{(4t+2)' \cdot (3t+5) - (4t+2) \cdot (3t+5)'}{(3t+5)^2} \\ &= \frac{4(3t+5) - 3(4t+2)}{(3t+5)^2} = \frac{(12t+20) - (12t+6)}{(3t+5)^2} \\ &= \frac{12t+20-12t-6}{(3t+5)^2} = \frac{14}{(3t+5)^2}; \\ (t^2 \cdot \sin(t))' &= (t^2)' \cdot \sin(t) + t^2 \cdot (\sin(t))' \\ &= 2t \cdot \sin(t) + t^2 \cdot (\cos(t)) = 2t \sin(t) + t^2 \cos(t); \\ (\ln(t^2 + 5^t + 1))' &= \frac{1}{t^2 + 5^t + 1} \cdot (t^2 + 5^t + 1)' \\ &= \frac{(t^2)' + (5^t)' + 1'}{t^2 + 5^t + 1} = \frac{2t + 5^t \ln(5) + 0}{t^2 + 5^t + 1} = \frac{2t + 5^t \ln(5)}{t^2 + 5^t + 1}. \end{aligned}$$

Alte exemple:

$$\begin{aligned} (13t^5 + 2t^3 - \sin(t))' &= 13 \cdot 5t^4 + 2 \cdot 3t^2 - \cos(t) = 65t^4 + 6t^2 - \cos(t); \\ \left(\frac{3t+2}{4t+3} \right)' &= \frac{3(4t+3) - 4(3t+2)}{(4t+3)^2} = \frac{12t+9-12t-8}{(4t+3)^2} = \frac{1}{(4t+3)^2}; \\ (t^4 \cdot \arctg(t))' &= 4t^3 \cdot \arctg(t) + \frac{t^4}{1+t^2}; \\ (\ln(4^t + t^4 + 4))' &= \frac{1}{4^t + t^4 + 4} \cdot (4^t + t^4 + 4)' = \frac{4^t \cdot \ln(4) + 4t^3}{4^t + t^4 + 4}. \end{aligned}$$

(10p) 6. Să se determine gradientul funcției $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y, z) = x^3 + y^2 + 3z - 3x^3y^2z - \sin(36xy^2z^3), \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Rezolvare: Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(x^3 + y^2 + 3z - 3x^3y^2z - \sin(36xy^2z^3) \right) \\ &= 3x^2 + 0 + 0 - 3 \cdot 3x^2 \cdot y^2z - \cos(36xy^2z^3) \cdot (36xy^2z^3)'_x \\ &= 3x^2 - 9x^2y^2z - \cos(36xy^2z^3) \cdot 36 \cdot 1 \cdot y^2z^3, \\ &= 3x^2 - 9x^2y^2z - 36y^2z^3 \cos(36xy^2z^3), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(x^3 + y^2 + 3z - 3x^3y^2z - \sin(36xy^2z^3) \right) \\ &= 0 + 2y + 0 - 3x^3 \cdot 2y \cdot z - \cos(36xy^2z^3) \cdot (36xy^2z^3)'_y \\ &= 2y - 6x^3yz - \cos(36xy^2z^3) \cdot 36x \cdot 2y \cdot z^3 \\ &= 2y - 6x^3yz - 72xyz^3 \cos(36xy^2z^3) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z} \left(x^3 + y^2 + 3z - 3x^3y^2z - \sin(36xy^2z^3) \right) \\ &= 0 + 0 + 3 - 3x^3y^2 \cdot 1 - \cos(36xy^2z^3) \cdot (36xy^2z^3)'_z \\ &= 3 - 3x^3y^2 - \cos(36xy^2z^3) \cdot 36xy^2 \cdot 3z^2 \\ &= 3 - 3x^3y^2 - 108xy^2z^2 \cos(36xy^2z^3). \end{aligned}$$

Amintim aici faptul că gradientul funcției f este:

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z); \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right).$$

Alt exemplu: dacă $f(x, y, z) = 3x + 4y + x^2y^3 + z^2 - xyz^2$, atunci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= (3x + 4y + x^2y^3 + z^2 - xyz^2)'_x = 3 + 0 + 2x \cdot y^3 + 0 - 1 \cdot yz^2 \\ &= 3 + 2xy^3 - yz^2, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= (3x + 4y + x^2y^3 + z^2 - xyz^2)'_y = 0 + 4 + x^2 \cdot 3y^2 + 0 - x \cdot 1 \cdot z^2 \\ &= 4 + 3x^2y^2 - xz^2, \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= (3x + 4y + x^2y^3 + z^2 - xyz^2)'_z = 0 + 0 + 0 + 2z - xy \cdot 2z \\ &= 2z - 2xyz, \end{aligned}$$

de unde obținem:

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= (3 + 2xy^3 - yz^2, 4 + 3x^2y^2 - xz^2, 2z - 2xyz). \end{aligned}$$

7. Fie funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 - 6x^2 - 12y^2 + z^2 + 9x + 36y - 10z + 1, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(10p) a) Calculați derivatele parțiale de ordinul întâi și gradientul funcției f .

(10p) b) Calculați derivatele parțiale de ordinul al doilea și Hessiana funcției f .

(10p) c) Stabiliți dacă funcția f admite puncte de extrem.

Rezolvare: a) Avem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^3 + y^3 - 6x^2 - 12y^2 + z^2 + 9x + 36y - 10z + 1) \\ &= 3x^2 + 0 - 6 \cdot 2x - 0 + 0 + 9 \cdot 1 + 0 - 0 + 0 \\ &= 3x^2 - 12x + 9, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^3 - 6x^2 - 12y^2 + z^2 + 9x + 36y - 10z + 1) \\ &= 0 + 3y^2 - 0 - 12 \cdot 2y + 0 + 0 + 36 \cdot 1 - 0 + 0 \\ &= 3y^2 - 24y + 36, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial z}(x^3 + y^3 - 6x^2 - 12y^2 + z^2 + 9x + 36y - 10z + 1) \\ &= 0 + 0 - 0 - 0 + 2z + 0 + 0 - 10 + 0 \\ &= 2z - 10. \end{aligned}$$

$$\text{Atunci } \nabla f(x, y, z) = (3x^2 - 12x + 9, 3y^2 - 24y + 36, 2z - 10).$$

b) Avem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 - 12x + 9) = 3 \cdot 2x - 12 \cdot 1 + 0 = 6x - 12,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3y^2 - 24y + 36) = 0 - 0 + 0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2z - 10) = 0 - 0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 - 12x + 9) = 0 - 0 + 0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3y^2 - 24y + 36) = 3 \cdot 2y - 24 \cdot 1 + 0 = 6y - 24,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2z - 10) = 0 - 0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (3x^2 - 12x + 9) = 0 - 0 + 0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (3y^2 - 24y + 36) = 0 - 0 = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} (2z - 10) = 2 \cdot 1 - 0 = 2.$$

Atunci matricea Hessiană este:

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x - 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6y - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

c) Determinăm mai întâi punctele critice din ecuația $\nabla f(a, b, c) = (0, 0, 0)$. Atunci:

$$\nabla f(a, b, c) = (0, 0, 0) \Rightarrow (3a^2 - 12a + 9, 3b^2 - 24b + 36, 2c - 10) = (0, 0, 0).$$

Avem astfel:

$$\begin{cases} 3a^2 - 12a + 9 = 0 \Rightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Rightarrow (a - 1)(a - 3) = 0 \Rightarrow a \in \{1, 3\}, \\ 3b^2 - 24b + 36 = 0 \Rightarrow b^2 - 8b + 12 = 0 \Rightarrow (b - 2)(b - 6) = 0 \Rightarrow b \in \{2, 6\}, \\ 2c - 10 = 0 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5. \end{cases}$$

Prin urmare, punctele critice sunt: $(1, 2, 5)$, $(1, 6, 5)$, $(3, 2, 5)$ și $(3, 6, 5)$. Apoi:

$$\bullet H_f(1, 2, 5) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 - 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 2 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -6 < 0, \\ \Delta_2 = 72 > 0, \\ \Delta_3 = 144 > 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(1, 2, 5)$ este punct șă,

$$\bullet H_f(1, 6, 5) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 1 - 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 6 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = -6 < 0, \\ \Delta_2 = -72 < 0, \\ \Delta_3 = -144 < 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(1, 6, 5)$ este punct șă,

$$\bullet H_f(3, 2, 5) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 - 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 2 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 6 > 0, \\ \Delta_2 = -72 < 0, \\ \Delta_3 = -144 < 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(3, 2, 5)$ este punct șă și

$$\bullet H_f(3, 6, 5) = \begin{pmatrix} 6 \cdot 3 - 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 6 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 6 > 0, \\ \Delta_2 = 72 > 0, \\ \Delta_3 = 144 > 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(3, 6, 5)$ este punct de minim local.

Alt exemplu: pentru funcția $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y, z) = y^3 + z^3 + x^2 - 12y^2 - 15z^2 - 6x + 45y + 63z + 1, \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

avem:

a) $\nabla f(x, y, z) = (2x - 6, 3y^2 - 24y + 45, 3z^2 - 30z + 63).$

b) $H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6y - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 6z - 30 \end{pmatrix}.$

c) Punctele critice sunt determinate de ecuația $\nabla f(a, b, c) = (0, 0, 0)$, de unde obținem:

$$\begin{cases} 2a - 6 = 0 \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow a = 3, \\ 3b^2 - 24b + 45 = 0 \Rightarrow b^2 - 8b + 15 = 0 \Rightarrow (b - 3)(b - 5) = 0 \Rightarrow b \in \{3, 5\}, \\ 3c^2 - 30c + 63 = 0 \Rightarrow c^2 - 10c + 21 = 0 \Rightarrow (c - 3)(c - 7) = 0 \Rightarrow c \in \{3, 7\}. \end{cases}$$

Prin urmare, punctele critice sunt $(3, 3, 3)$, $(3, 3, 7)$, $(3, 5, 3)$ și $(3, 5, 7)$. Atunci:

$$\bullet H_f(3, 3, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 3 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 3 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = -12 < 0, \\ \Delta_3 = 144 > 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(3, 3, 3)$ este punct șă,

$$\bullet H_f(3, 3, 7) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 3 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 7 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = -12 < 0, \\ \Delta_3 = -144 < 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(3, 3, 7)$ este punct șă,

$$\bullet H_f(3, 5, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 5 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 3 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 12 > 0, \\ \Delta_3 = 144 < 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(3, 5, 3)$ este punct șă și

$$\bullet H_f(3, 5, 7) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 \cdot 5 - 24 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \cdot 7 - 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \Delta_1 = 2 > 0, \\ \Delta_2 = 12 > 0, \\ \Delta_3 = 144 > 0, \end{cases}$$

de unde obținem că punctul $(3, 5, 7)$ este punct de minim local.