

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

AM 2 - RESTANȚĂ

(10p) 1. Să se calculeze: $\int 9x^8 - 5x^4 + \sin(x) \, dx$.

(10p) 2. Să se calculeze: $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) \, dx$.

(10p) 3. Să se calculeze: $\int_0^1 \frac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 32} \, dx$.

(10p) 4. Să se calculeze $\int_C y^2 \, dx + x^4 \, dy$, știind că $(C) : x = y^2, y \in [0, 2]$.

(10p) 5. Să se calculeze $\iint_D 12x^3y^2 \, dx \, dy$, știind că $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], y \in [0, 2]\}$.

(10p) 6. Să se calculeze $\iint_D (5x^3 + 2y) \, dx \, dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 4x\}$.

(20p) 7. Să se calculeze $\iint_S 1 \, dS$, unde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

(10p) 8. Să se calculeze $\iiint_V (3x^2 + 8xyz) \, dx \, dy \, dz$, știind că $V = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

Se acordă **10p** din oficiu.

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

ANALIZĂ MATEMATICĂ 2 - RESTANȚĂ

Recomandare

Pentru a obține mai ușor nota minimă de promovare, recomandăm parcurgerea subiectelor:

(10p) 1. Să se calculeze: $\int 9x^8 - 5x^4 + \sin(x) \, dx$.

1. - de rezolvat integral

(10p) 2. Să se calculeze: $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) \, dx$.

2. - de rezolvat integral

(10p) 3. Să se calculeze: $\int_0^1 \frac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 32} \, dx$.

3. - de rezolvat integral

(10p) 4. Să se calculeze $\int_C y^2 \, dx + x^4 \, dy$, știind că $(C) : x = y^2, y \in [0, 2]$.

4. - de rezolvat integral

5. Să se calculeze $\iint_D 12x^3y^2 \, dx \, dy$, știind că $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], y \in [0, 2]\}$.

5. - de rezolvat integral

În acest mod, puteți obține **10p[1]+10p[2]+10p[3]+10p[4]+10p[5]+10p[Oficiu] =60p**, adică nota **6,00** (media șase)...

Nota 1: în cele ce urmează, puteți găsi soluțiile la toate problemele din model, nu doar la cele recomandate.

Nota 2: problema 8 este foarte similară cu problema 5...

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

ANALIZĂ MATEMATICĂ - RESTANȚĂ

Model rezolvat

(10p) 1. Să se calculeze: $\int 9x^8 - 5x^4 + \sin(x) \, dx$.

Rezolvare: Vom utiliza formulele:

$$\begin{aligned} \bullet \int 1 \, dx &= x + C & \bullet \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \bullet \int \cos(x) \, dx &= \sin(x) + C & \bullet \int \sin(x) \, dx &= -\cos(x) + C. \end{aligned}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \int 9x^8 - 5x^4 + \sin(x) \, dx &= \int 9x^8 \, dx - \int 5x^4 \, dx + \int \sin(x) \, dx \\ &= 9 \int x^8 \, dx - 5 \int x^4 \, dx + \int \sin(x) \, dx \\ &= 9 \cdot \frac{x^9}{9} - 5 \cdot \frac{x^5}{5} - \cos(x) + C \\ &= x^9 - x^5 - \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Alte exemple:

$$\begin{aligned} \bullet \int 7x^5 + 3x^4 + \sin(x) \, dx &= \int 7x^5 \, dx + \int 3x^4 \, dx + \int \sin(x) \, dx = \\ &= 7 \cdot \frac{x^6}{6} + 3 \cdot \frac{x^5}{5} - \cos(x) + C = \frac{7x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \cos(x) + C \\ \bullet \int 3x^6 + 4x^2 - \cos(x) \, dx &= 3 \cdot \frac{x^7}{7} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \sin(x) + C; \\ \bullet \int 4x^{14} - 3x - \sin(x) \, dx &= 4 \cdot \frac{x^{15}}{15} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

(10p) 2. Să se calculeze: $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) \, dx$.

2. Vom folosi metoda de integrare prin părți, adică formula:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) \cdot g'(x) \, dx &= (f(x) \cdot g(x)) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx \\ &= f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a) - \int_a^b f'(x) \cdot g(x) \, dx, \end{aligned}$$

cu

$$\begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \cos(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \sin(x). \end{cases}$$

Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} x \cdot \cos(x) \, dx &= (x \cdot \sin(x)) \Big|_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} 1 \cdot \sin(x) \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 \cdot \sin(0) + \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot 1 - 0 \cdot 0 + \int_0^{\pi/2} \sin(x) \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} + (-\cos(x)) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} + \left(\cos(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2} + 1 - 0 \\ &= \frac{\pi}{2} + 1. \end{aligned}$$

Alt exemplu:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x \cdot \sin(x) \, dx &= (x \cdot (-\cos(x))) \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \cdot (-\cos(x)) \, dx \\ &= \pi \cdot (-\cos(\pi)) - 0 \cdot \cos(0) + \int_0^{\pi} \cos(x) \, dx \\ &= \pi \cdot (-(-1)) - 0 + \int_0^{\pi} \cos(x) \, dx \\ &= \pi + (\sin(x)) \Big|_0^{\pi} \\ &= \pi + \sin(\pi) - \sin(0) = \pi + 0 - 0 = \pi. \end{aligned}$$

(10p) 3. Să se calculeze: $\int_0^1 \frac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 32} \, dx$.

Rezolvare: Fie $t = x^4 + 3x^2 + 32$. Atunci $dt = (4x^3 + 6x) \, dx$ (obținem această relație prin derivare). Mai mult, avem:

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0^4 + 3 \cdot 0^2 + 32 = 32 & 1^4 + 3 \cdot 1^2 + 32 = 36 \end{array}$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{4x^3 + 6x}{x^4 + 3x^2 + 32} \, dx &= \int_0^1 \frac{1}{x^4 + 3x^2 + 32} \cdot (4x^3 + 6x) \, dx = \int_{32}^{36} \frac{1}{t} \, dt \\ &= \ln(t) \Big|_{32}^{36} = \ln(36) - \ln(32) = \ln\left(\frac{36}{32}\right) = \ln\left(\frac{9}{8}\right). \end{aligned}$$

Alt exemplu: Să se calculeze $\int_2^4 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1} dx$.

Fie $t = x^3 + 2x + 1$. Atunci $dt = (3x^2 + 2) dx$ (obținem această relație prin derivare). Mai mult, avem:

$$\frac{x}{t} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 2^3 + 2 \cdot 2 + 1 = 13 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 4 \\ 4^3 + 2 \cdot 4 + 1 = 73 \end{array} \right|$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \int_2^4 \frac{3x^2 + 2}{x^3 + 2x + 1} dx &= \int_2^4 \frac{1}{x^3 + 2x + 1} \cdot (3x^2 + 2) dx = \int_{13}^{73} \frac{1}{t} dt \\ &= \ln(t) \Big|_{13}^{73} = \ln(73) - \ln(13) = \ln\left(\frac{73}{13}\right). \end{aligned}$$

4. Să se calculeze $\int_C y^2 dx + x^4 dy$, știind că $(C) : x = y^2, y \in [0, 2]$.

Cum $(C) : x = y^2, y \in [0, 2]$, atunci o parametrizare a curbei C este:

$$\begin{cases} x = x(t) = t^2, \\ y = y(t) = t, \end{cases} \quad t \in [0, 2] \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 2t, \\ y'(t) = 1. \end{cases}$$

Vom folosi următoarea formulă de calcul a integralelor curbilinii de primul și al doilea tip:

$$\int_C P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_a^b \left(P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right) dt$$

unde parametrizarea curbei C este $x = x(t), y = y(t)$ și $t \in [a, b]$.

În cazul nostru, obținem:

$$\begin{aligned} \int_C y^2 dx + x^4 dy &= \int_0^2 y(t)^2 \cdot x'(t) + x^4(t) \cdot y'(t) dt = \int_0^2 t^2 \cdot 2t + (t^2)^4 \cdot 1 dt \\ &= \int_0^2 2t^3 + t^4 dt = 2 \int_0^2 t^3 dt + \int_0^2 t^4 dt = 2 \cdot \frac{t^4}{4} \Big|_{t=0}^{t=2} + \frac{t^5}{5} \Big|_{t=0}^{t=2} \\ &= \frac{2^4 - 0^4}{2} + \frac{2^5 - 0^5}{5} = \frac{16}{2} + \frac{32}{5} = 8 + \frac{32}{5} = \frac{72}{5}. \end{aligned}$$

Alt exemplu: Să se calculeze $\int_C x^3 dx + 4y^2 dy$, știind că $(C) : y = x^2, x \in [0, 1]$.

Cum $(C) : y = x^2, x \in [0, 1]$, atunci o parametrizare a curbei C este:

$$\begin{cases} x = x(t) = t, \\ y = y(t) = t^2, \end{cases} \quad t \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = 1, \\ y'(t) = 2t. \end{cases}$$

Obținem astfel:

$$\begin{aligned} \int_C x^3 dx + 4y^2 dy &= \int_0^1 x(t)^3 \cdot x'(t) + 4y^2(t) \cdot y'(t) dt = \int_0^1 t^3 \cdot 1 + 4(t^2)^2 \cdot 2t dt \\ &= \int_0^1 t^3 + 8t^5 dt = \int_0^1 t^3 dt + 8 \int_0^1 t^5 dt = \frac{t^4}{4} \Big|_{t=0}^{t=1} + 8 \cdot \frac{t^6}{6} \Big|_{t=0}^{t=1} \\ &= \frac{1^4 - 0^4}{4} + \frac{4(1^6 - 0^6)}{3} = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} = \frac{3}{12} + \frac{16}{12} = \frac{19}{12}. \end{aligned}$$

5. Să se calculeze $\iint_D 12x^3y^2 \, dx \, dy$, știind că $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1, 2], y \in [0, 2]\}$.

Rezolvare: Deoarece domeniul D este un dreptunghi, atunci nu contează ordinea de integrare. Alegem varianta:

$$\iint_D 12x^3y^2 \, dx \, dy = \int_1^2 \left(\int_0^2 12x^3y^2 \, dy \right) dx.$$

Atunci:

$$\int_0^2 12x^3y^2 \, dy = 12x^3 \int_0^2 y^2 \, dy = 12x^3 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{y=0}^{y=2} = 4x^3 \cdot (2^3 - 0^3) = 4x^3 \cdot 8 = 32x^3.$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \iint_D 12x^3y^2 \, dx \, dy &= \int_1^2 \left(\int_0^2 12x^3y^2 \, dy \right) dx \\ &= \int_1^2 32x^3 \, dx = 32 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_{x=1}^{x=2} = 8 \cdot (2^4 - 1^4) = 8 \cdot 15 = 120. \end{aligned}$$

Alt exemplu: Să se calculeze $\iint_D 9x^2y^2 \, dx \, dy$, știind că $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [2, 4], y \in [1, 3]\}$.

Deoarece domeniul D este un dreptunghi, atunci nu contează ordinea de integrare. Alegem varianta:

$$\iint_D 9x^2y^2 \, dx \, dy = \int_2^4 \left(\int_1^3 9x^2y^2 \, dy \right) dx.$$

Atunci:

$$\int_1^3 9x^2y^2 \, dy = 9x^2 \int_1^3 y^2 \, dy = 9x^2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{y=1}^{y=3} = 3x^2 \cdot (3^3 - 1^3) = 3x^2 \cdot 26 = 78x^2.$$

Prin urmare:

$$\begin{aligned} \iint_D 9x^2y^2 \, dx \, dy &= \int_2^4 \left(\int_1^3 9x^2y^2 \, dy \right) dx = \int_2^4 78x^2 \, dx = 78 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=2}^{x=4} \\ &= 26 \cdot (4^3 - 2^3) = 26 \cdot (64 - 8) = 26 \cdot 56 = 1456. \end{aligned}$$

(10p) 6. Să se calculeze $\iint_D (5x^3 + 2y) \, dx \, dy$, unde $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 4x\}$.

Rezolvare: Domeniul D reprezintă un triunghi. Pentru a evita o reparametrizare a domeniului D , vom integra astfel:

$$\iint_D (5x^3 + 2y) \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_x^{4x} (5x^3 + 2y) \, dy \right) dx.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_x^{4x} (5x^3 + 2y) \, dy &= \int_x^{4x} 5x^3 \, dy + \int_x^{4x} 2y \, dy \\ &= 5x^3 \int_x^{4x} 1 \, dy + 2 \int_x^{4x} y \, dy = 5x^3 \cdot y \Big|_{y=x}^{y=4x} + 2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x}^{y=4x} \\ &= 5x^3 \cdot (4x - x) + ((4x)^2 - x^2) = 5x^3 \cdot 3x + (16x^2 - x^2) = 15x^4 + 15x^2. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned}\iint_D (5x^3 + 2y) \, dx \, dy &= \int_0^1 \left(\int_x^{4x} (5x^3 + 2y) \, dy \right) dx = \int_0^1 (15x^4 + 15x^2) \, dx \\ &= 15 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} + 15 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = 3 \cdot (1^5 - 0^5) + 5 \cdot (1^3 - 0^3) = 3 + 5 = 8.\end{aligned}$$

Alt exemplu: dacă $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y \leq x \leq 4y, 0 \leq y \leq 2\}$, atunci

$$\begin{aligned}\iint_D 10xy^4 \, dx \, dy &= \int_0^2 \left(\int_{3y}^{4y} 10xy^4 \, dx \right) dy = \int_0^2 10y^4 \left(\int_{3y}^{4y} x \, dx \right) dy \\ &= \int_0^2 10y^4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=3y}^{x=4y} dy = \int_0^2 5y^4 \cdot ((4y)^2 - (3y)^2) dy \\ &= \int_0^2 5y^4 \cdot (16y^2 - 9y^2) dy = \int_0^2 5y^4 \cdot 7y^2 dy = \int_0^2 35y^6 dy \\ &= 35 \cdot \frac{y^7}{7} \Big|_{y=0}^{y=2} = 5 \cdot (2^7 - 0^7) = 5 \cdot 128 = 640.\end{aligned}$$

(20p) 7. Să se calculeze $\iint_S 1 \, dS$, unde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$.

Rezolvare: Deoarece S este dată de $x^2 + y^2 + z^2 = 9 = 3^2$, obținem că S este o submulțime a sferei de rază 3, centrată în origine. Deoarece x, y și z sunt pozitive, obținem parametrizarea:

$$\begin{cases} x = x(u, v) = 3 \cos u \cos v, \\ y = y(u, v) = 3 \cos u \sin v, \\ z = z(u, v) = 3 \sin u, \end{cases} \quad \text{unde } u \in [0, \pi], v \in [0, 2\pi].$$

Prin urmare, avem:

$$\vec{r}(u, v) = (3 \cos u \cos v, 3 \cos u \sin v, 3 \sin u),$$

de unde obținem:

$$\begin{cases} \vec{r}_u(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u, v) = (-3 \sin u \cos v, -3 \sin u \sin v, 3 \cos u) \\ \text{și} \\ \vec{r}_v(u, v) = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u, v) = (-3 \cos u \sin v, 3 \cos u \cos v, 0). \end{cases}$$

Atunci, folosindu-ne de formulele

$$\begin{cases} E(u, v) = \|\vec{r}_u(u, v)\|^2 \\ F(u, v) = \vec{r}_u(u, v) \cdot \vec{r}_v(u, v) = \langle \vec{r}_u(u, v), \vec{r}_v(u, v) \rangle \\ G(u, v) = \|\vec{r}_v(u, v)\|^2 \end{cases}$$

obținem:

$$\begin{aligned}E(u, v) &= \|(-3 \sin u \cos v, -3 \sin u \sin v, 3 \cos u)\|^2 = (-3 \sin u \cos v)^2 + (-3 \sin u \sin v)^2 + (3 \cos u)^2 \\ &= 9 \sin^2 u \cos^2 v + 9 \sin^2 u \sin^2 v + 9 \cos^2 u = 9 \sin^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + 9 \cos^2 u \\ &= 9 \sin^2 u \cdot 1 + 9 \cos^2 u = 9 \sin^2 u + 9 \cos^2 u = 9 \cdot (\sin^2 u + \cos^2 u) = 9,\end{aligned}$$

apoi

$$\begin{aligned}F(u, v) &= (-3 \sin u \cos v, -3 \sin u \sin v, 3 \cos u) \cdot (-3 \cos u \sin v, 3 \cos u \cos v, 0) \\ &= (-3 \sin u \cos v) \cdot (-3 \cos u \sin v) + (-3 \sin u \sin v) \cdot (3 \cos u \cos v) + 3 \cos u \cdot 0 \\ &= 9 \sin u \cos u \sin v \cos v - 9 \sin u \cos u \sin v \cos v + 0 = 0\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} G(u, v) &= \|(-3 \cos u \sin v, 3 \cos u \cos v, 0)\|^2 = (-3 \cos u \sin v)^2 + (3 \cos u \cos v)^2 + 0^2 \\ &= 9 \cos^2 u \sin^2 v + 9 \cos^2 u \cos^2 v = 9 \cos^2 u \cdot (\sin^2 v + \cos^2 v) = 9 \cos^2 u \cdot 1 = 9 \cos^2 u. \end{aligned}$$

Ne vom folosi apoi de următoarea formulă: *dacă suprafața S este descrisă de parametrizarea $\vec{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, cu $u \in [a, b]$ și $v \in [c, d]$, atunci*

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \int_a^b \int_c^d f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v)} \, dv \, du.$$

În cazul nostru, obținem:

$$\begin{aligned} \iint_S 1 \, dS &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sqrt{E(u, v) \cdot G(u, v) - F^2(u, v)} \, dv \, du \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{9 \cdot 9 \cos^2 u - 0^2} \, dv \, du = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{81 \cos^2 u} \, dv \, du \\ &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 9 \cdot |\cos u| \, dv \, du \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} 9 \cos u \, dv \, du + \int_{\pi/2}^\pi \int_0^{2\pi} (-9 \cos u) \, dv \, du, \end{aligned}$$

din moment ce $\cos u \geq 0$ pentru $u \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ și $\cos u \leq 0$ pentru $u \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$. Atunci:

$$\begin{aligned} \int_S 1 \, dS &= \int_0^{\pi/2} 9 \cos u \left(\int_0^{2\pi} 1 \, dv \right) du - \int_{\pi/2}^\pi 9 \cos u \left(\int_0^{2\pi} 1 \, dv \right) du \\ &= \int_0^{\pi/2} 9 \cos u \cdot v \Big|_{v=0}^{v=2\pi} du - \int_{\pi/2}^\pi 9 \cos u \cdot v \Big|_{v=0}^{v=2\pi} du \\ &= \int_0^{\pi/2} 18\pi \cos u \, du - \int_{\pi/2}^\pi 18\pi \cos u \, du \\ &= 18\pi \int_0^{\pi/2} \cos u \, du - 18\pi \int_{\pi/2}^\pi \cos u \, du \\ &= 18\pi \cdot \sin u \Big|_{u=0}^{u=\pi/2} - 18\pi \sin u \Big|_{u=\pi/2}^{u=\pi} \\ &= 18\pi \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) \right) - 18\pi \left(\sin(\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) \\ &= 18\pi \left((1 - 0) - (0 - 1) \right) = 36\pi. \end{aligned}$$

(10p) 8. Să se calculeze $\iiint_V (3x^2 + 8xyz) \, dx dy dz$, știind că $V = [0, 1] \times [0, 2] \times [0, 3]$.

Rezolvare: deoarece domeniul V este un paralelipiped dreptunghic, nu contează ordinea de integrare. Alegem să integrăm astfel:

$$\iiint_V (3x^2 + 8xyz) \, dx dy dz = \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 (3x^2 + 8xyz) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Integrala anterioară se calculează în mod similar cu integrala dublă de la exercițiul 5, cu singura observație ca, în acest caz, avem de calculat trei integrale în loc de două. Vom integra “din interior către exterior” și vom scoate, de fiecare dată, variabilele care nu depind de variabila față de care se integrează în fața integralei, adică:

$$\begin{aligned}\int_0^3 (3x^2 + 8xyz) \, dz &= \int_0^3 3x^2 \, dz + \int_0^3 8xyz \, dz = 3x^2 \int_0^3 1 \, dz + 8xy \int_0^3 z \, dz \\ &= 3x^2 \cdot z \Big|_{z=0}^{z=3} + 8xy \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=3} = 3x^2 \cdot (3 - 0) + 4xy \cdot (3^2 - 0^2) \\ &= 9x^3 + 36xy.\end{aligned}$$

Apoi:

$$\begin{aligned}\int_0^2 \left(\int_0^3 (3x^2 + 8xyz) \, dz \right) dy &= \int_0^2 9x^3 + 36xy \, dy = \int_0^2 9x^3 \, dy + \int_0^2 36xy \, dy \\ &= 9x^3 \int_0^2 1 \, dy + 36x \int_0^2 y \, dy = 9x^3 y \Big|_{y=0}^{y=2} + 36x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=2} \\ &= 9x^3 \cdot (2 - 0) + 18x \cdot (2^2 - 0^2) = 18x^3 + 72x.\end{aligned}$$

Obținem astfel:

$$\begin{aligned}\iiint_V (3x^2 + 8xyz) \, dx dy dz &= \int_0^1 \left(\int_0^2 \left(\int_0^3 (3x^2 + 8xyz) \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^2 (9x^3 + 36xy) \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 (18x^3 + 72x) \, dx \\ &= 18 \int_0^1 x^3 \, dx + 72 \int_0^1 x \, dx = 18 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_{x=0}^{x=1} + 72 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{9}{2} \cdot (1^4 - 0^4) + 36 \cdot (1^2 - 0^2) = \frac{9}{2} + 36 = \frac{81}{2}.\end{aligned}$$

Alt exemplu: dacă $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 4\}$, atunci:

$$\iiint_V 12xyz^2 \, dx dy dz = \int_0^2 \left(\int_1^3 \left(\int_2^4 12xyz^2 \, dz \right) dy \right) dx.$$

Avem astfel:

$$\begin{aligned}\int_2^4 12xyz^2 \, dz &= 12xy \int_2^4 z^2 \, dz = 12xy \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{z=2}^{z=4} = 4xy \cdot (4^3 - 2^3) \\ &= 4xy \cdot (64 - 8) = 4xy \cdot 56 = 224xy.\end{aligned}$$

Apoi

$$\begin{aligned}\int_1^3 \left(\int_2^4 12xyz^2 \, dz \right) dy &= \int_1^3 224xy \, dy = 224x \int_1^3 y \, dy \\ &= 224x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=3} = 112x \cdot (3^2 - 1^2) = 112x \cdot (9 - 1) = 112x \cdot 8 = 896x,\end{aligned}$$

de unde obținem:

$$\begin{aligned}\iiint_V 12xyz^2 \, dx dy dz &= \int_0^2 \left(\int_1^3 \left(\int_2^4 12xyz^2 \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\int_1^3 224xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^2 896x \, dx \\ &= 896 \int_0^2 x \, dx = 896 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=2} = 448 \cdot (2^2 - 0^2) = 448 \cdot (4 - 0) = 448 \cdot 4 = 1\,792.\end{aligned}$$