

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

ANALIZĂ MATEMATICĂ - RESTANȚĂ

(10p) 1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n^5 + 4n^4 + 5}{6n^4 + 5n^5 + 4n^6 + 3}$.

(10p) 2. Calculați: $\int 47x^{46} - 46x + \cos(x) \, dx$.

(10p) 3. Să se studieze natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

(10p) 4. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcției $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t) = \left(12t^4 - 3t^2 + \cos(t), \frac{5t+7}{7t+5}, t^5 \cdot \arcsin(t), \ln(3^t + \sin(5t) + 1) \right), \forall t \in (0, 1).$$

(10p) 5. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y) = 3x + y^2 + \sin(3xy^2), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculați gradientul și Hessiana funcției f într-un punct oarecare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(10p) 6. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$. Calculați: $\iint_D 15x^4y^2 \, dx dy$.

(10p) 7. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y \leq x \leq 4y, 0 \leq y \leq 2\}$. Calculați: $\iint_D 10xy^4 \, dx dy$.

(10p) 8. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 64\}$. Calculați: $\iint_D x^2 + y^2 \, dx dy$.

(10p) 9. Fie $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 6, 3 \leq z \leq 5\}$. Calculați:

$$\iiint_V 24x^5yz \, dx dy dz.$$

Se acordă **(10p)** din oficiu.

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

ANALIZĂ MATEMATICĂ - RESTANȚĂ

Recomandare

Pentru a obține mai ușor nota minimă de promovare, recomandăm parcurgerea subiectelor:

(10p) 1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n^5 + 4n^4 + 5}{6n^4 + 5n^5 + 4n^6 + 3}$.

1. - de rezolvat integral

(10p) 2. Calculați: $\int 47x^{46} - 46x + \cos(x) \, dx$.

2. - de rezolvat integral

(10p) 4. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcției $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t) = \left(12t^4 - 3t^2 + \cos(t), \frac{5t+7}{7t+5}, t^5 \cdot \arcsin(t), \ln(3^t + \sin(5t) + 1) \right), \forall t \in (0, 1).$$

4. - de rezolvat doar primele două componente

(10p) 5. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y) = 3x + y^2 + \sin(3xy^2), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculați gradientul și Hessiana funcției f într-un punct oarecare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

5. - de rezolvat doar pentru prima parte a funcției, adică $3x + y^2$

(10p) 6. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$. Calculați: $\iint_D 15x^4y^2 \, dx dy$.

6. - de rezolvat integral

(10p) 9. Fie $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 6, 3 \leq z \leq 5\}$. Calculați:

$$\iiint_V 24x^5yz \, dx dy dz.$$

9. - de rezolvat integral

În acest mod, puteți obține **10p[1]+10p[2]+5p[4]+5p[5]+10p[6]+10p[9]+10p[Oficiu] = 60p**, adică nota **6,00** (șase).

Nota 1: exercițiile **6** și **9** sunt extrem de similare!!!

Nota 2: în cele ce urmează, puteți găsi soluțiile la toate problemele din model, nu doar la cele recomandate.

Nume și prenume: _____

Grupa: _____

ANALIZĂ MATEMATICĂ - RESTANȚĂ

Model rezolvat

(10p) 1. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n^5 + 4n^4 + 5}{6n^4 + 5n^5 + 4n^6 + 3}$.

Rezolvare: Vom folosi limita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\frac{a_n}{b_m}\right) \cdot (+\infty), & \text{dacă } n > m, \\ \frac{a_n}{b_m}, & \text{dacă } n = m \\ 0, & \text{dacă } n < m. \end{cases}$$

Mai exact, această formulă ne spune că:

- dacă gradul polinomului de la numărător (cel care are coeficienții $a_n, a_{n-1}, \dots$, șamd) este mai mare decât cel al polinomului de la numitor (cel care are coeficienții $b_m, b_{m-1}, \dots$, șamd), adică dacă $n > m$, atunci rezultatul este $+\infty$ sau $-\infty$, în funcție de semnul fracției determinate de coeficienții dominanți, adică semnul fracției $\frac{a_n}{b_m}$;
- dacă cele două grade sunt egale, adică dacă $n = m$, atunci rezultatul este chiar fracția coeficienților dominanți, adică $\frac{a_n}{b_m}$;
- dacă gradul de la numărător este mai mic decât cel de la numitor, adică dacă $n < m$, atunci rezultatul este 0.

Prin urmare, limita $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n^5 + 4n^4 + 5}{6n^4 + 5n^5 + 4n^6 + 3}$ poate fi rescrisă drept $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n^5 + 4n^4 + 5}{4n^6 + 5n^5 + 6n^4 + 3}$ și observăm astfel că $n = m = 6$ (adică ambele polinoame sunt de gradul 6), iar limita este $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Pentru a primi punctajul maxim, vom parcurge pașii următori:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^6 + 3n^5 + 4n^4 + 5}{4n^6 + 5n^5 + 6n^4 + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \left(2 + \frac{3n^5}{n^6} + \frac{4n^4}{n^6} + \frac{5}{n^6} \right)}{n^6 \left(4 + \frac{5n^5}{n^6} + \frac{6n^4}{n^6} + \frac{3}{n^6} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{4}{n^2} + \frac{5}{n^6}}{4 + \frac{5}{n} + \frac{6}{n^2} + \frac{3}{n^6}} = \frac{2}{4},$$

deoarece fracțiile $\frac{3}{n}, \frac{4}{n^2}, \frac{5}{n^6}, \frac{5}{n}, \frac{6}{n^2}$ și $\frac{3}{n^6}$ converg la 0 pentru $n \rightarrow \infty$.

Alte exemple:

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 4n^4 + 5n^3 + 2}{-2n^4 + 4n^3 + 5n^2 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(3 + \frac{4n^4}{n^5} + \frac{5n^3}{n^5} + \frac{2}{n^5} \right)}{n^4 \left(-2 + \frac{4n^3}{n^4} + \frac{5n^2}{n^4} + \frac{1}{n^4} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n^4} \cdot \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^5}}{-2 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{1}{n^4}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) = -\infty. \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^6 + 4n^5 + 5n^4 + 2}{2n^4 - 4n^5 - 5n^6 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 \left(3 + \frac{4n^5}{n^6} + \frac{5n^4}{n^6} + \frac{2}{n^6} \right)}{n^6 \left(\frac{2n^4}{n^6} - \frac{4n^5}{n^6} - \frac{5n^6}{n^6} + \frac{1}{n^6} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^6}}{\frac{2}{n^2} - \frac{4}{n} - 5 + \frac{1}{n^6}} = -\frac{3}{5}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + 4n^4 + 5n^3 + 2}{2n^4 - 4n^5 - 5n^6 + 1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 \left(3 + \frac{4n^4}{n^5} + \frac{5n^3}{n^5} + \frac{2}{n^5} \right)}{n^6 \left(\frac{2n^4}{n^6} - \frac{4n^5}{n^6} - 5 + \frac{1}{n^6} \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5}{n^6} \cdot \frac{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2} + \frac{2}{n^5}}{\frac{2}{n^2} - \frac{4}{n} - 5 + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) = 0 \cdot \left(-\frac{3}{5} \right) = 0. \end{aligned}$$

(10p) 2. Calculați: $\int 47x^{46} - 46x + \cos(x) \, dx$.

Rezolvare: Vom utiliza formulele:

$$\begin{aligned} \bullet \int 1 \, dx &= x + \mathcal{C} & \bullet \int x^n \, dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathcal{C} \\ \bullet \int \cos(x) \, dx &= \sin(x) + \mathcal{C} & \bullet \int \sin(x) \, dx &= -\cos(x) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \int 47x^{46} - 46x + \cos(x) \, dx &= \int 47x^{46} \, dx - \int 46x \, dx + \int \cos(x) \, dx \\ &= 47 \int x^{46} \, dx - 46 \int x \, dx + \int \cos(x) \, dx \\ &= 47 \cdot \frac{x^{47}}{47} - 46 \cdot \frac{x^2}{2} + \sin(x) + \mathcal{C} \\ &= x^{47} - 23x^2 + \sin(x) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

Alte exemple:

$$\begin{aligned} \bullet \int 7x^5 + 3x^4 + \sin(x) \, dx &= \int 7x^5 \, dx + \int 3x^4 \, dx + \int \sin(x) \, dx = \\ &= 7 \cdot \frac{x^6}{6} + 3 \cdot \frac{x^5}{5} - \cos(x) + \mathcal{C} = \frac{7x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} - \cos(x) + \mathcal{C} \\ \bullet \int 3x^6 + 4x^2 - \cos(x) \, dx &= 3 \cdot \frac{x^7}{7} + 4 \cdot \frac{x^3}{3} - \sin(x) + \mathcal{C}; \\ \bullet \int 4x^{14} - 3x - \sin(x) \, dx &= 4 \cdot \frac{x^{15}}{15} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + \cos(x) + \mathcal{C}. \end{aligned}$$

(10p) 3. Să se studieze natura seriei: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

Rezolvare: Vom folosi criteriul raportului. Fie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, cu $a_n \geq 0$, pentru orice $n \geq 1$. Dacă există

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, atunci:

$$\bullet L < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este convergentă; } \bullet L > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ este divergentă.}$$

În cazul nostru, avem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \cdot n!}{3^n \cdot 3} \cdot \frac{3^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3} = +\infty > 1.$$

Prin urmare, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$ este divergentă.

Alt exemplu: pentru seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (4n+3)}$, avem

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \cdot \frac{1}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot (n+1)!}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (4n+3) \cdot (4(n+1)+3)} \cdot \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (4n+3)}{5^n \cdot n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n \cdot 5 \cdot (n+1) \cdot n!}{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (4n+3) \cdot (4n+7)} \cdot \frac{7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot \dots \cdot (4n+3)}{5^n \cdot n!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 \cdot (n+1)}{4n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n+5}{4n+7} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{4n} = \frac{5}{4} > 1, \end{aligned}$$

de unde obținem că seria este divergentă.

(10p) 4. Să se calculeze derivata de ordinul întâi a funcției $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^4$ definită prin:

$$f(t) = \left(12t^4 - 3t^2 + \cos(t), \frac{5t+7}{7t+5}, t^5 \cdot \arcsin(t), \ln(3^t + \sin(5t) + 1) \right), \quad \forall t \in (0, 1).$$

Rezolvare: Amintim aici formulele $1' = 0$, $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$, $(\sin(t))' = \cos(t)$, $(\cos(t))' = -\sin(t)$, $(\ln(t))' = \frac{1}{t}$, $(a^t)' = a^t \cdot \ln(a)$, $(\arcsin(t))' = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ și $(\arctg(t))' = \frac{1}{1+t^2}$.

Mai mult decât atât, avem următoarele reguli de derivare pentru două funcții derivabile $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, cu $g \neq 0$ pe D , și pentru $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(f \pm g)' = f' \pm g', \quad (\lambda f)' = \lambda \cdot f', \quad \left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}, \quad (f \cdot g)' = f'g + fg' \text{ și } (f(g))' = f'(g) \cdot g'.$$

Cu alte cuvinte, avem:

$$\begin{aligned} (12t^4 - 3t^2 + \cos(t))' &= 12 \cdot (t^4)' - 3 \cdot (t^2)' + (\cos(t))' \\ &= 12 \cdot 4t^3 - 3 \cdot 2t + (-\sin(t)) = 48t^3 - 6t - \sin(t); \\ \left(\frac{5t+7}{7t+5} \right)' &= \frac{(5t+7)' \cdot (7t+5) - (5t+7) \cdot (7t+5)'}{(7t+5)^2} \\ &= \frac{5(7t+5) - 7(5t+7)}{(7t+5)^2} = \frac{(35t+25) - (35t+49)}{(7t+5)^2} \\ &= \frac{35t+25-35t-49}{(7t+5)^2} = \frac{-24}{(7t+5)^2}; \\ (t^5 \cdot \arcsin(t))' &= (t^5)' \cdot \arcsin(t) + t^5 \cdot (\arcsin(t))' \\ &= 5t^4 \cdot \arcsin(t) + t^5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}; \\ (\ln(3^t + \sin(5t) + 1))' &= \frac{1}{3^t + \sin(5t) + 1} \cdot (3^t + \sin(5t) + 1)' \\ &= \frac{(3^t)' + (\sin(5t))' + 1'}{3^t + \sin(5t) + 1} = \frac{3^t \cdot \ln(3) + \cos(5t) \cdot (5t)' + 0}{3^t + \sin(5t) + 1} \\ &= \frac{3^t \cdot \ln(3) + 5 \cos(5t)}{3^t + \sin(5t) + 1}. \end{aligned}$$

Alte exemple:

$$\begin{aligned}(13t^5 + 2t^3 - \sin(t))' &= 13 \cdot 5t^4 + 2 \cdot 3t^2 - \cos(t) = 65t^4 + 6t^2 - \cos(t); \\ \left(\frac{3t+2}{4t+3}\right)' &= \frac{3(4t+3) - 4(3t+2)}{(4t+3)^2} = \frac{12t+9-12t-8}{(4t+3)^2} = \frac{1}{(4t+3)^2}; \\ (t^4 \cdot \arctg(t))' &= 4t^3 \cdot \arctg(t) + \frac{t^4}{1+t^2}; \\ (\ln(4^t + t^4 + 4))' &= \frac{1}{4^t + t^4 + 4} \cdot (4^t + t^4 + 4)' = \frac{4^t \cdot \ln(4) + 4t^3}{4^t + t^4 + 4}.\end{aligned}$$

(10p) 5. Fie funcția $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$f(x, y) = 3x + y^2 + \sin(3xy^2), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Calculați gradientul și Hessiana funcției f într-un punct oarecare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Rezolvare: Avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (3x + y^2 + \sin(3xy^2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (3x) + \frac{\partial}{\partial x} (y^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\sin(3xy^2)) \\ &= 3 + 0 + \cos(3xy^2) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (3xy^2) \\ &= 3 + \cos(3xy^2) \cdot 3 \cdot 1 \cdot y^2 \\ &= 3 + 3y^2 \cos(3xy^2)\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (3x + y^2 + \sin(3xy^2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (3x) + \frac{\partial}{\partial y} (y^2) + \frac{\partial}{\partial y} (\sin(3xy^2)) \\ &= 0 + 2y + \cos(3xy^2) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (3xy^2) \\ &= 2y + \cos(3xy^2) \cdot 3x \cdot 2y \\ &= 2y + 6xy \cos(3xy^2).\end{aligned}$$

Prin urmare, gradientul funcției f este:

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (3 + 3y^2 \cos(3xy^2), 2y + 6xy \cos(3xy^2)).$$

Calculăm acum derivatele de ordinul al doilea "care încep cu x ":

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (3 + 3y^2 \cos(3xy^2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (3) + \frac{\partial}{\partial x} (3y^2 \cdot \cos(3xy^2)) \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial x} (3y^2) \cdot \cos(3xy^2) + 3y^2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\cos(3xy^2)) \\ &= 0 + 0 \cdot \cos(3xy^2) + 3y^2 \cdot (-\sin(3xy^2)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (3xy^2) \\ &= -3y^2 \sin(3xy^2) \cdot 3 \cdot 1 \cdot y^2 \\ &= -9y^4 \sin(3xy^2)\end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y + 6xy \cos(3xy^2)) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2y) + \frac{\partial}{\partial x} (6xy \cdot \cos(3xy^2)) \\ &= 0 + \frac{\partial}{\partial x} (6xy) \cdot \cos(3xy^2) + 6xy \cdot \frac{\partial}{\partial x} (\cos(3xy^2)) \\ &= 6 \cdot 1 \cdot y \cdot \cos(3xy^2) + 6xy \cdot (-\sin(3xy^2)) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (3xy^2) \\ &= 6y \cos(3xy^2) - 6xy \sin(3xy^2) \cdot 3 \cdot 1 \cdot y^2 \\ &= 6y \cos(3xy^2) - 18xy^3 \sin(3xy^2).\end{aligned}$$

În mod analog, avem:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (3 + 3y^2 \cos(3xy^2)) = 6y \cos(3xy^2) - 18xy^3 \sin(3xy^2); \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (2y + 6xy \cos(3xy^2)) = 2 + 6x \cos(3xy^2) - 36x^2 y^2 \sin(3xy^2).\end{aligned}$$

Prin urmare, Hessiana funcției f este:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} -9y^4 \sin(3xy^2) & 6y \cos(3xy^2) - 18xy^3 \sin(3xy^2) \\ 6y \cos(3xy^2) - 18xy^3 \sin(3xy^2) & 2 + 6x \cos(3xy^2) - 36x^2 y^2 \sin(3xy^2) \end{pmatrix}.$$

Alte exemple: dacă $f(x, y) = 3x + 4y + x^2 y^3$, atunci

$$\nabla f(x, y) = (3 \cdot 1 + 0 + 2x \cdot y^3, 0 + 4 \cdot 1 + x^2 \cdot 3y^2) = (3 + 2xy^3, 4 + 3x^2 y^2)$$

și

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2 y \end{pmatrix}$$

(10p) 6. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$. Calculați: $\iint_D 15x^4 y^2 \, dx dy$.

Rezolvare: Deoarece $0 \leq x \leq 1$ și $1 \leq y \leq 3$, atunci domeniul D este un dreptunghi și este irelevantă ordinea de integrare. Vom alege varianta:

$$\iint_D 15x^4 y^2 \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_1^3 15x^4 y^2 \, dy \right) dx.$$

Vom calcula mai întâi:

$$\int_1^3 15x^4 y^2 \, dy = 15x^4 \int_1^3 y^2 \, dy = 15x^4 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{y=1}^{y=3} = 5x^4 \cdot (3^3 - 1^3) = 5x^4 \cdot 26 = 130x^4.$$

Apoi:

$$\int_0^1 \left(\int_1^3 15x^4 y^2 \, dy \right) dx = \int_0^1 130x^4 \, dx = 130 \int_0^1 x^4 \, dx = 130 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} = 26 \cdot (1^5 - 0^5) = 26.$$

Prin urmare, avem:

$$\iint_D 15x^4 y^2 \, dx dy = 26.$$

Alt exemplu: dacă $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4\}$, atunci

$$\iint_D 12x^3 y^2 \, dx dy = \int_2^3 \left(\int_1^4 12x^3 y^2 \, dy \right) dx.$$

Apoi

$$\int_1^4 12x^3 y^2 \, dy = 12x^3 \int_1^4 y^2 \, dy = 12x^3 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{y=1}^{y=4} = 4x^3 \cdot (4^3 - 1^3) = 4x^3 \cdot 63 = 252x^3,$$

de unde obținem

$$\begin{aligned} \iint_D 12x^3 y^2 \, dx dy &= \int_2^3 \left(\int_1^4 12x^3 y^2 \, dy \right) dx = \int_2^3 252x^3 \, dx = 252 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_{x=2}^{x=3} = 63(3^4 - 2^4) \\ &= 63 \cdot (81 - 16) = 63 \cdot 65 = 4095. \end{aligned}$$

(10p) 7. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3y \leq x \leq 4y, 0 \leq y \leq 2\}$. Calculați: $\iint_D 10xy^4 \, dx dy$.

Rezolvare: Domeniul D reprezintă un triunghi. Pentru a evita o reparametrizare a domeniului D , vom integra astfel:

$$\begin{aligned} \iint_D 10xy^4 \, dx dy &= \int_0^2 \left(\int_{3y}^{4y} 10xy^4 \, dx \right) dy = \int_0^2 10y^4 \left(\int_{3y}^{4y} x \, dx \right) dy \\ &= \int_0^2 10y^4 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=3y}^{x=4y} dy = \int_0^2 5y^4 \cdot ((4y)^2 - (3y)^2) dy \\ &= \int_0^2 5y^4 \cdot (16y^2 - 9y^2) dy = \int_0^2 5y^4 \cdot 7y^2 dy = \int_0^2 35y^6 dy \\ &= 35 \cdot \frac{y^7}{7} \Big|_{y=0}^{y=2} = 5 \cdot (2^7 - 0^7) = 5 \cdot 128 = 640. \end{aligned}$$

Alt exemplu: dacă $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 4x\}$, atunci

$$\iint_D (5x^3 + 2y) \, dx dy = \int_0^1 \left(\int_x^{4x} (5x^3 + 2y) \, dy \right) dx.$$

Avem

$$\begin{aligned} \int_x^{4x} (5x^3 + 2y) \, dy &= \int_x^{4x} 5x^3 \, dy + \int_x^{4x} 2y \, dy \\ &= 5x^3 \int_x^{4x} 1 \, dy + 2 \int_x^{4x} y \, dy = 5x^3 \cdot y \Big|_{y=x}^{y=4x} + 2 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=x}^{y=4x} \\ &= 5x^3 \cdot (4x - x) + ((4x)^2 - x^2) = 5x^3 \cdot 3x + (16x^2 - x^2) = 15x^4 + 15x^2. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} \iint_D (5x^3 + 2y) \, dx dy &= \int_0^1 \left(\int_x^{4x} (5x^3 + 2y) \, dy \right) dx = \int_0^1 (15x^4 + 15x^2) \, dx \\ &= 15 \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_{x=0}^{x=1} + 15 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{x=0}^{x=1} = 3 \cdot (1^5 - 0^5) + 5 \cdot (1^3 - 0^3) = 3 + 5 = 8. \end{aligned}$$

(10p) 8. Fie $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 64\}$. Calculați: $\iint_D x^2 + y^2 \, dx dy$.

Rezolvare: Domeniul D este discul de rază 8 centrat în origine. Putem utiliza astfel coordonatele polare:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta, \end{cases}$$

unde $\rho \in [0, 8]$ și $\theta \in [0, 2\pi]$. Fie $\overline{D} = [0, 8] \times [0, 2\pi]$. Jacobianul transformării din coordonate carteziane în coordonate polare este egal cu ρ . Prin urmare, avem:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 + y^2 \, dx \, dy &= \iint_{\overline{D}} \left((\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2 \right) \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^8 \left(\int_0^{2\pi} \rho \cdot (\rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta) \, d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^8 \left(\int_0^{2\pi} \rho \cdot \rho^2 \, d\theta \right) d\rho, \end{aligned}$$

unde am folosit formula fundamentală a trigonometriei: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$, pentru orice $\theta \in [0, 2\pi]$. Obținem astfel:

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 + y^2 \, dx \, dy &= \int_0^8 \left(\int_0^{2\pi} \rho^3 \, d\theta \right) d\rho = \int_0^8 \rho^3 \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^8 \rho^3 \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = \int_0^8 \rho^3 \cdot (2\pi - 0) \, d\rho = 2\pi \int_0^8 \rho^3 \, d\rho \\ &= 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_{\rho=0}^{\rho=8} = \frac{\pi}{2} \cdot (8^4 - 0^4) = 4 \cdot 8^3 \cdot \pi = 2048\pi. \end{aligned}$$

Alt exemplu: dacă $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 49\}$, atunci vom folosi aceeași transformare din coordonate carteziane în coordonate polare, unde acum $\overline{D} = [0, 7] \times [0, 2\pi]$. Prin urmare:

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dx \, dy &= \iint_{\overline{D}} \rho \cos \theta \cdot \rho \, d\rho \, d\theta \\ &= \int_0^7 \left(\int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \theta \, d\theta \right) d\rho = \int_0^7 \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta \right) d\rho \\ &= \int_0^7 \rho^2 \cdot \sin \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = \int_0^7 \rho^2 \cdot (\sin(2\pi) - \sin(0)) \, d\rho \\ &= \int_0^7 \rho^2 \cdot (0 - 0) \, d\rho = \int_0^7 0 \, d\rho = 0. \end{aligned}$$

(10p) 9. Fie $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 2 \leq y \leq 6, 3 \leq z \leq 5\}$. Calculați:

$$\iiint_V 24x^5 y z \, dx \, dy \, dz.$$

Rezolvare: deoarece domeniul V este un paralelipiped dreptunghic, nu contează ordinea de integrare. Alegem să integrăm astfel:

$$\iiint_V 24x^5 y z \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \left(\int_2^6 \left(\int_3^5 24x^5 y z \, dz \right) dy \right) dx.$$

Integrala anterioară se calculează în mod similar cu integrala dublă de la exercițiul 6, cu singura observație ca, în acest caz, avem de calculat trei integrale în loc de două. Vom integra “din interior către exterior” și vom scoate, de fiecare dată, variabilele care nu depind de variabila față de care se integrează în fața integralei, adică:

$$\begin{aligned} \int_3^5 24x^5 y z \, dz &= 24x^5 y \int_3^5 z \, dz = 24x^5 y \cdot \frac{z^2}{2} \Big|_{z=3}^{z=5} = 12x^5 y \cdot (5^2 - 3^2) \\ &= 12x^5 y \cdot (25 - 9) = 12x^5 y \cdot 16 = 192x^5 y. \end{aligned}$$

Apoi:

$$\begin{aligned}\int_2^6 \left(\int_3^5 24x^5 y z \, dz \right) dy &= \int_2^6 192x^5 y \, dy = 192x^5 \int_2^6 y \, dy = 192x^5 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=2}^{y=6} \\ &= 96x^5 \cdot (6^2 - 2^2) = 96x^5 \cdot (36 - 4) = 96x^5 \cdot 32 = 3\,072x^5.\end{aligned}$$

Obținem astfel:

$$\begin{aligned}\iiint_V 24x^5 y z \, dx dy dz &= \int_0^1 \left(\int_2^6 \left(\int_3^5 24x^5 y z \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_2^6 192x^5 y \, dy \right) dx \\ &= \int_0^1 3\,072x^5 \, dx \\ &= 3\,072 \int_0^1 x^5 \, dx = 3\,072 \cdot \frac{x^6}{6} \Big|_{x=0}^{x=1} = 512 \cdot (1^6 - 0^6) = 512 \cdot (1 - 0) = 512.\end{aligned}$$

Alt exemplu: dacă $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 4\}$, atunci:

$$\iiint_V 12xyz^2 \, dx dy dz = \int_0^2 \left(\int_1^3 \left(\int_2^4 12xyz^2 \, dz \right) dy \right) dx.$$

Avem astfel:

$$\begin{aligned}\int_2^4 12xyz^2 \, dz &= 12xy \int_2^4 z^2 \, dz = 12xy \cdot \frac{z^3}{3} \Big|_{z=2}^{z=4} = 4xy \cdot (4^3 - 2^3) \\ &= 4xy \cdot (64 - 8) = 4xy \cdot 56 = 224xy.\end{aligned}$$

Apoi

$$\begin{aligned}\int_1^3 \left(\int_2^4 12xyz^2 \, dz \right) dy &= \int_1^3 224xy \, dy = 224x \int_1^3 y \, dy \\ &= 224x \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=1}^{y=3} = 112x \cdot (3^2 - 1^2) = 112x \cdot (9 - 1) = 112x \cdot 8 = 896x,\end{aligned}$$

de unde obținem:

$$\begin{aligned}\iiint_V 12xyz^2 \, dx dy dz &= \int_0^2 \left(\int_1^3 \left(\int_2^4 12xyz^2 \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_0^2 \left(\int_1^3 224xy \, dy \right) dx \\ &= \int_0^2 896x \, dx \\ &= 896 \int_0^2 x \, dx = 896 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{x=0}^{x=2} = 448 \cdot (2^2 - 0^2) = 448 \cdot (4 - 0) = 448 \cdot 4 = 1\,792.\end{aligned}$$